Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Tentamen – Stochastiek A, woensdag 24 oktober 2001

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4
punten:	25	25	25	25

1. Veronderstel dat α de kans is dat van een tweeling beide kinderen jongens zijn, en dat β de kans is dat ze allebei meisje zijn. Veronderstel verder, dat als een tweeling uit een jongen en een meisje bestaat, de kans dat het eerst geboren kind een meisje is, $\frac{1}{2}$ is.

   (a) Wat is de kans dat de tweeling van het zelfde geslacht is?

   (b) Toon aan dat de kans dat het eerst geboren kind van een tweeling een jongen is, gelijk is aan $\frac{1+\alpha-\beta}{2}$.

   (c) Als het eerst geboren kind van een tweeling een jongen is, wat is dan de kans dat het tweede kind eveneens een jongen is?

2. Er wordt herhaaldelijk geworpen met een dobbelsteen. Laat

$$X = \text{het aantal worpen tot en met voor het eerst een 6 bovenkomt,}$$

   en

$$Y = \text{het aantal worpen tot en met voor het eerst een 5 bovenkomt.}$$

   (a) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

   (b) Bepaal $E(X+Y)$.

   (c) Bepaal $P(X=n, Y=m)$ voor alle $n, m \geq 1$.

   (d) Bepaal $E(X|Y=1)$.

3. In een vaas zit een rode en een blauwe bal. Trek n keer met teruglegging een bal uit de vaas. Voor $1 \leq k \leq n$, laat X_k het totaal aantal getrokken rode ballen zijn na k trekkingen, en laat Y_k het totaal aantal getrokken blauwe ballen zijn na k trekkingen. Verder, laat $Z_k = X_k - Y_k$.

(a) Laat zien dat $Z_1, Z_2, \ldots$ een symmetrische stochastische wandeling is.

(b) Bepaal de kans $P(Z_{10} = 4)$.

(c) Stel dat n even is. Bepaal dan de kans $P(X_k > Y_k, 1 \leq k \leq n-1, X_n = Y_n)$.

(d) Laat zien dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt dat

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \frac{Z_n}{n} \right| > \varepsilon \right) = 0.$$

4. Laat $X_1, X_2, \cdots$ een rij van onafhankelijke stochasten zijn, met genererende functie $G_{X_i}(s) = \frac{1}{4}(s + s^2 + s^4 + s^5)$, voor $i = 1, 2, \cdots$. Laat N een Binomiaal verdeelde stochast zijn met parameters m en p (d.w.z. $P(N = n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$ voor $n = 0, 1, \cdots, m$). Veronderstel verder dat N onafhankelijk van $X_1, X_2, \cdots$ is. Laat $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$.

(a) Laat zien dat voor $n = 0, 1, 2, \cdots m$ en alle s,

$$E(s^Y | N = n) = \frac{1}{4^n} \left(s + s^2 + s^4 + s^5 \right)^n.$$

(b) Bepaal (m.b.v. onderdeel (a)) $P(Y = 5 | N = 3)$.

(c) Laat zien (m.b.v. (a)) dat de genererende functie van Y gegeven wordt door

$$G_Y(s) = \left(\frac{1}{4} \left(s + s^2 + s^4 + s^5 \right) p + 1 - p \right)^m.$$

(d) Bepaal de verwachting $E(Y)$ en de variantie $\sigma^2(Y)$ van Y.