Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde op dinsdag 16 april 2013, 9.30-12.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat tien opgaven met in totaal 14 (deel)opgaven.
- Op iedere (deel)vraag kunnen maximaal 4 punten worden gescoord, behalve op (deel)vragen 1 en 5a, waarop maximaal 3 punten kunnen worden gescoord. Totaal 54 punten. Het cijfer wordt bepaald door door 5 te delen; opgave 10b is een bonusopgave.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- In principe (dus wanneer ik geen rekenfouten heb gemaakt) zouden er mooie antwoorden (geheeltallig) uit moeten komen. Bij eventuele stelsels vergelijkingen komt het (als het goed is) vaak zo uit dat een variabele de waarde 1 krijgt.

Succes!

Opgave 1.
Gegeven zijn twee gesorteerde rijen $a_1, \ldots, a_k$ en $b_1, \ldots, b_n$. Deze willen we samenvoegen tot één rij, waarin de elementen $a_2, \ldots, a_k$ en $b_1, \ldots, b_n$ in de juiste volgorde blijven staan (waarbij de elementen uit de andere rij er tussen door komen); element a_1 mag overal komen te staan, zolang het maar niet links van a_2 staat. Hoeveel verschillende rijen kunnen op deze manier worden gevormd? Deze formule mag geen sommatie bevatten.

Opgave 2.
Bepaal het aantal verschillende getallen tussen 100 en 1000 die een veelvoud zijn van 15 en die bestaan uit verschillende cijfers; een getal mag niet met een 0 beginnen. Volledige enumeratie kost tijd en levert niets op.

Opgave 3.
Gegeven zijn n robots die in een keurige rij met gelijke snelheid achter elkaar aan een doodlopende steeg in lopen. De robots zijn zo geprogrammeerd dat ze, in geval van een botsing, de andere kant uit bewegen. Na verloop van tijd zijn alle robots uit de steeg gekomen. We zijn geïnteresseerd in het totale aantal botsingen (zowel met elkaar als met de muur) dat de robots heeft gemaakt. Een botsing tussen twee robots telt voor 1; je mag aannemen dat een robot niet tegelijkertijd van achteren en van voren wordt geraakt. Bepaal het aantal botsingen als functie van n.

Opgave 4.
We willen k niet-negatieve, gehele getallen $x_1, \ldots, x_k$ trekken zodanig dat $x_1 + \ldots + x_k = n$.

(a) Bewijs met behulp van een **combinatorisch** bewijs dat het aantal mogelijkheden hiervoor gelijk is aan $\binom{n+k-1}{k-1}$.

(b) Bewijs (a) met behulp van een genererende functie.

(c) Bereken (dus geen volledige enumeratie) het aantal mogelijkheden om drie niet-negatieve, gehele getallen x_1, x_2 en x_3 te kiezen zodanig dat $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, waarbij geldt $x_1 \in \{3, 6\} \cup \{9, 12\}$, $x_2 \leq 8$ en $3 \leq x_3 \leq 10$.

Opgave 5.
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

(a) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 2$ en $a_1 = 4$.

(b) $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 4n$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 2$ en $a_1 = -1$.

Opgave 6.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met een genererende functie.

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 1 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 5.$$

Opgave 7.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met de sommatie-factor methode

$$(n-1)T_n = (n-3)T_{n-1} + 4 \quad \text{voor } n \geq 3.$$

Geef daarbij duidelijk aan hoe je de gebruikte factor kunt afleiden (ook al kun je het met het blote oog direct zien).

Opgave 8.
Het konijnenprobleem van Fibonacci had de volgende karakteristieken:

- Een volwassen paar krijgt iedere maand één nieuw paar nakomelingen;
- Een paar is na twee maanden volwassen (en wordt dan direct productief);
- De konijnen sterven niet.

De eigenschap dat ze niet sterven zal er snel toe leiden dat er een konijnenplaag zal optreden. Daarom krijgen de jagers de opdracht om hier wat aan te doen. Stel dat er iedere maand X% wordt geschoten door jagers; dit gebeurt voordat er jonge konijnen worden geboren en de kans om geschoten te worden is onafhankelijk van de leeftijd van de konijnen. Hoe groot moet X minstens zijn wil het geen plaag worden? Neem aan dat je begint met 10.000 paar volwassen konijnen en 0 jongen.

Opgave 9
Twee spelers hebben het volgende spel bedacht. Ze doen om de beurt een zet. De speler die aan de beurt is moet een nieuwe gans neerzetten op een speelbord met vakjes genummerd 1 t/m 100. Hierbij geldt de volgende regel: Er mag geen gans op een vakje met nummer t worden gezet als er al een gans staat op één van de vakjes $t-20$, $t-10$, t, $t+10$, of $t+20$ (je mag dus geen gans op vakje 11 zetten als er al eentje op vakje 1, 21 of 31 staat; **vakje 91 maakt niet uit**). De speler die geen gans neer kan zetten heeft verloren. Na uiterlijk hoeveel beurten is er een winnaar bekend?

Opgave 10.

Eén van de minder bekende sprookjes uit *Duizend en één nacht* begint als volgt.

Er was eens een sultan die een hele lieve, mooie dochter had. Toen haar vader stierf, liet hij haar een betoverde doos met een ketting en k kleuren kralen na (met een overvloed van kralen van elke kleur; de kralen van dezelfde kleur waren identiek). Met deze kralen kon ze een ketting van n kralen rijgen, waarna de ketting haar een dag zou beschermen tegen het kwaad. Helaas zou de ketting haar magische kracht verliezen wanneer er een equivalente combinatie (volgorde en kleur) van kralen aan zou worden geregen (wanneer de dochter twee keer de ketting samenstelt als rood-blauw-rood, dan is het mis, maar eerst rood-blauw-rood en daarna rood-rood-blauw of blauw-rood-blauw is allebei okay). Iedere ochtend werd dit gechekt door een dienaar die de ketting in een magisch vuur gooide; wanneer de ketting boven het vuur ging zweven, dan was het goed (en wanneer de ketting er niet boven ging zweven, dan kon zij als verloren worden beschouwd).

De beschermende werking van de ketting was hard nodig, want de grootvizier, die na de dood van de sultan zijn kans schoon had gezien om de macht te grijpen, wilde haar tot zijn vrouw maken (ik laat hier even de beschrijving van de grootvizier weg; neem van mij aan dat hij niet bijzonder aantrekkelijk was, en de dochter had er dus geen zin in). De grootvizier had te horen gekregen dat hij voor eeuwig zou regeren wanneer hij met de dochter van de sultan zou trouwen voordat er 1001 *dagen waren verstreken; mocht het dan nog niet gelukt zijn, dan zou hij op het einde van dag* 1001 *sterven.*

Hoewel de grootvizier niet heel veel verstand had van combinatoriek, snapte hij wel dat het over 1001 dagen met hem gedaan was, tenzij hij een paar geschikte trucs zou verzinnen. Zijn eerste daad was het omkopen van de dienaar die de ketting in het vuur gooide: deze moest de sluiting van de ketting losmaken en de volgorde van de stenen gaan manipuleren; wanneer de ketting dan niet werd vernietigd in het vuur, dan werd de oorspronkelijke volgorde weer in orde gemaakt (dus wanneer de dochter al een keer rood-blauw-rood heeft gebruikt en dan aan komt zetten met rood-rood-blauw, dan verandert de (niet zo trouwe) dienaar dit snel in rood-blauw-rood, zodat de ketting wordt venietigd en de grootvizier heeft gewonnen). De dochter van de sultan vermoedde dit soort trucs wel en bedacht een goede strategie.

(a) Gegeven $k = 5$ (dus 5 verschillende kleuren), bereken hoe groot het aantal kralen aan de ketting n minstens moet zijn zodat er een veilige strategie bestaat voor de dochter om het minstens 1001 dagen vol te houden met behulp van de magische ketting.

(b) Toen de grootvizier doorkreeg wat de dochter van plan was (en hij uit had laten rekenen dat hij het niet zou redden), ging hij over op plan B: hij zorgde ervoor dat de door hem omgekochte dienaar van iedere kleur precies één kraal kreeg om zo de samenstelling van de ketting te kunnen veranderen. Helaas (voor de grootvizier) had de dienaar niet de volledige vrijheid om de ketting te manipuleren: hij kon maximaal één kraal per kleur van de ketting afhalen (waarbij het aantal kralen gelijk moet blijven aan n); in geval van drie kleuren rood, wit, blauw mag de dienaar een ketting met rood-rood-blauw niet veranderen in blauw-blauw-wit, want er kan maximaal één rode kraal afgehaald worden. Gegeven dat $n = 30$ en $k = 5$, bestaat er een strategie zodat de dochter met zekerheid minstens $T = 1001$ dagen beschermd blijft? Verklaar uw antwoord. Bedenk dat de dienaar de ketting weer in de oorspronkelijke staat terug moet brengen, wanneer de ketting niet door het vuur wordt verzwolgen.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion

Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Evenzo kun je het aantal elementen met precies m eigenschappen bepalen als

$$e_m = s_m - \binom{m+1}{1} s_{m+1} + \binom{m+2}{2} s_{m+2} + \ldots + (-1)^{r-m} \binom{m+r-m}{r-m} s_r.$$

Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1) x^r.$$