Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde op woensdag 16 april 2014, 9.30-12.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 12 (deel)opgaven.
- De maximale score per onderdeel bedraagt:
  - 5 punten voor ieder van de vragen 1b, 2b, 3, 5, 6, 7;
  - 4 punten voor ieder van de vragen 1c, 1d, 4a, 4b;
  - 3 punten voor onderdeel 1a;
  - 2 punten voor onderdeel 2a.

  Totaal 51 punten. Het cijfer wordt bepaald door door 5 te delen (met een maximum van 10).
- Vergeet niet de evaluatie in te vullen.

Succes!

==

Opgave 1.

Monsieur Cannibale is een bekende attractie uit het park de Efteling. We bekijken in deze opgave een vereenvoudigde versie hiervan (zie schematische weergave). Deze bestaat uit 9 ketels (genummerd 1 t/m 9) die op een aantal draaischijven staan. Er is een grote draaischijf, zeg draaischijf 1, met daarop weer 3 kleine draaischijven, zeg draaischijf A, B en C. Op de draaischijven A, B en C staan elk twee ketels (met nummers 1 t/m 6). Verder staan er nog 3 ketels (genummerd 7,8,9) op draaischijf 1 naast deze schijven A, B en C (zie plaatje). Draaischijf 1 kan over 120 graden draaien. De schijven A, B en C kunnen hiervan onafhankelijk 180 graden draaien, wel is het zo dat **A, B en C altijd tegelijk draaien; wanneer A draait, dan draaien B en C ook**.

(a) Beschouw de permutaties die overeenkomen met het draaien van de grote draaischijf en de drie kleine draaischijven. Toon aan dat deze permutaties een groep vormen. Hierbij mag u aannemen dat aan de associativiteitseis is voldaan.

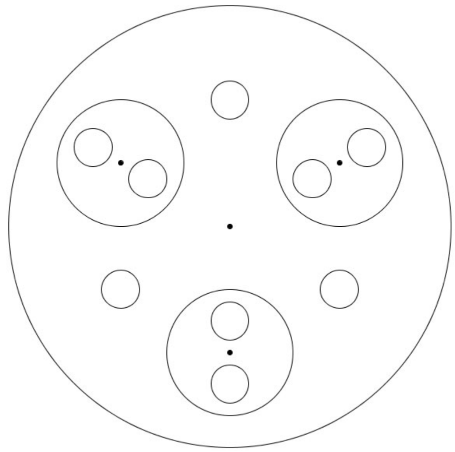

Figure 1: Monsieur Cannibale: schematisch

(b) Het blijkt dat de cykel index behorende bij deze groep permutaties gegeven wordt door:

$$\frac{1}{g}(a_1x_1^9 + a_2x_1^3x_2^3 + a_3x_3^3 + a_4x_3x_6).$$

Bepaal g, a_1, a_2, a_3 en a_4.

(c) Nu worden de ketels gekleurd met drie kleuren. Omdat de 3 ketels 7,8,9 niet zo spannend zijn worden ze aantrekkelijk gemaakt door ze knalrood te maken. De overige 6 ketels krijgen de kleur groen en blauw. We beperken ons nu alleen nog tot de overgebleven 6 ketels (met nummer 1 t/m 6). Bepaal het aantal mogelijke herkenbare kleuringen van de 6 ketels.

(d) Op het park heeft men gekozen voor het schilderen van vier blauwe ketels, maar er is iets misgegaan: van dichtbij kun je duidelijk zien dat er twee verschillende soorten blauw (zeg maar lichtblauw en donkerblauw) zijn gebruikt (van een afstandje zie je niets bijzonders). Vermoedelijk hebben de vier schilders, die alle vier één ketel hebben geverfd, niet alle vier dezelfde kleur blauw gebruikt. Bepaal het verschil in het aantal herkenbaar verschillende kleuringen dat iemand waarneemt tussen wanneer hij veraf en wanneer hij dichtbij staat.

Opgave 2.
Het Langste Acyclische Pad (LAP) probleem is gedefinieerd als volgt: Gegeven is een willekeurige ongerichte graaf $G = (V, E)$, waarbij voor iedere kant $e \in E$ geldt dat $l(e)$ de lengte van die kant aangeeft. Gevraagd wordt om de lengte van het **langste pad zonder cykels** te bepalen dat in de graaf loopt; hierbij mag je dus zelf bepalen tussen welke punten dit pad loopt, zolang het maar het langste pad in de graaf is.

(a) Definieer de beslissingsvariant BVLAP van LAP, en toon aan dat BVLAP tot de klasse NP behoort. U hoeft u hierbij de polynomialiteit van de verschillende onderdelen niet aan te tonen, zolang u maar zegt wat er moet gebeuren.

(b) Toon aan dat BVLAP $\mathcal{NP}$-volledig is. U mag hierbij gebruiken dat het HAMILTONCYKEL en het HAMILTONPAD probleem $\mathcal{NP}$-volledig zijn.

Het HAMILTONCYKEL probleem is als volgt gedefinieerd: Gegeven een **willekeurige samenhangende** graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een tour die ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt?

Het HAMILTONPAD probleem is als volgt gedefinieerd: Gegeven een **willekeurige samenhangende** graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een pad dat ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt?

Opgave 3.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

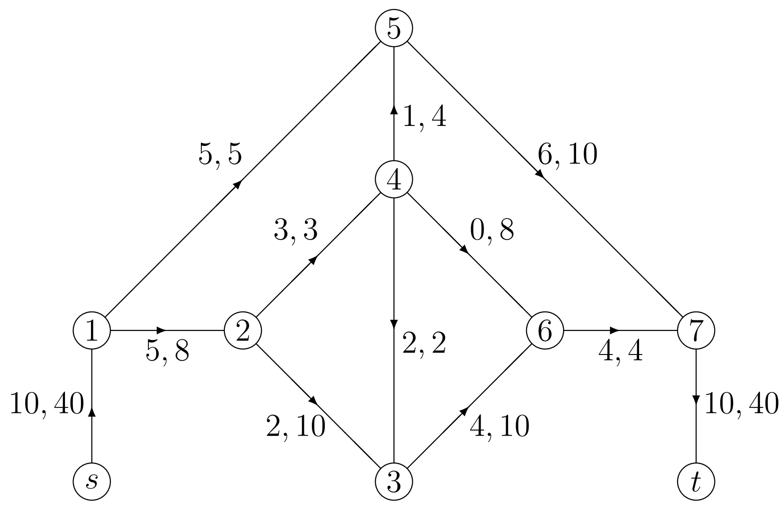

Figure 2: Netwerk.

Opgave 4.
Gegeven is een groep studenten die in een willekeurig ski-gebied zijn beland. De folder van het gebied claimt dat er minstens 100 verschillende afdalingen gemaakt kunnen worden, en dit moet natuurlijk worden gecheckt. Daartoe wordt een kaart van het ski-gebied gepakt, en die wordt vertaald in een gerichte graaf. Hierbij corresponderen de punten met de kruispunten in de afdalingen; verder zijn er punten waar een lift eindigt (beginpunten) en waar een afdaling eindigt (eindpunten). Twee punten v en w zijn verbonden met een pijl (v, w) indien je direct van v naar w kunt skiën zonder dat je een ander punt tegenkomt. Indien er twee (of meer) duidelijk verschillende mogelijkheden zijn om rechtstreeks van v naar w te skiën, dan neem je twee (of meer) pijlen tussen v en w op. Omdat je natuurlijk wilt skiën (dus niet jezelf omhoog duwen), nemen we aan dat een pijl (v, w) alleen kan bestaan indien v hoger ligt dan w.

Samenvatting met extra informatie: je hebt een gegeven gerichte acyclische graaf $G = (V, A)$. Punten zonder inkomende pijlen zijn beginpunten; punten zonder uitgaande pijlen zijn eindpunten. Tussen twee punten kunnen verschillende pijlen lopen; die nummer je dan als $(v, w)_1, (v, w)_2$, enz. Definieer q_{vw} als het aantal verschillende pijlen van v naar w. Hernummer de punten in V als $1, \ldots, |V|$ zodanig dat voor iedere pijl $(v, w) \in A$ geldt dat $v > w$ (dit kan omdat de graaf acyclisch is); neem aan dat de m eindpunten nummer $1, \ldots, m$ hebben gekregen. Van iedere pijl is bekend wat zijn lengte is, en hoe deze is gekleurd (groen, blauw, rood, zwart). Een afdaling begint bij een beginpunt en eindigt bij een eindpunt; twee afdalingen zijn verschillend indien ze minstens één verschillende pijl bevatten; hierbij tellen $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ als verschillende pijlen.

(a) Geef een DP-algoritme om het aantal verschillende afdalingen te bepalen.

(b) De verschillende pijlen zijn gecodeerd met kleuren groen, blauw, rood en zwart, afhankelijk van de moeilijkheid van de afdaling. Omdat groene pistes niet zo uitdagend zijn, wensen de studenten afdalingen met die kleur niet voor vol aan te zien. Maar, omdat sommige interessante afdalingen soms een groen intermezzo bevatten, worden afdalingen met maximaal één groene pijl toch gedoogd. Geef aan hoe je het DP van (a) kunt aanpassen om het aantal verschillende afdalingen met maximaal één groene pijl te tellen.

Opgave 5.
Beschouw weer dezelfde situatie als bij Opgave 4. Het blijkt dat het aantal afdalingen dat gevonden is bij Opgave 4 toch wel wat groot is voor een dagje relaxed skiën. Daarom besluit men zich te beperken tot het maken van **zoveel mogelijk** afdalingen waarbij **geen enkel deel van de piste meer dan eenmaal wordt bezocht, met uitzondering van kruispunten**. Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen.

Opgave 6.
Beschouw weer dezelfde situatie als bij Opgave 4. Het dagje skiën dat gevonden is bij Opgave 5 is wel heel relaxed, en daarom besluit men tot een tussenweg tussen Opgaven 4 en 5. Men wil een **zo klein mogelijk** aantal afdalingen maken, maar wel onder de voorwaarde dat iedere iedere piste (pijl) minstens éénmaal wordt doorkruist (genomen); hierbij zijn $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ verschillende pijlen. Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen met uw kennis van stroomproblemen (al dan niet met kosten erbij); hierbij mag u alleen gebruik maken van een ondergrens van 0 op de stroom door een pijl.

Opgave 7.
Bij het oplossen van het Handelsreizigersprobleem op een graaf $G = (V, E)$ met behulp van *branch-and-bound* gebruikt men een zogenaamde *1-tree*. Een 1-tree bestaat uit een opspannende boom plus één extra kant, waarbij vooraf een verzameling kanten D is gegeven die allemaal zeker tot de 1-tree moeten behoren. Gegeven de graaf $G = (V, E)$ met gegeven lengte $l(e) > 0$ voor iedere kant $e \in E$ en gegeven de kantenverzameling $D \subset E$, geef aan hoe je een 1-tree van minimale lengte kunt bepalen die alle kanten in D bevat. U mag er hierbij van uit gaan dat D een acyclische deelgraaf van E is en dat er geen twee kanten zijn met gelijke lengte. **Bewijs de correctheid van uw algorithme; u mag hierbij uitgaan van de correctheid van de bij het college behandelde algoritmen om een minimale opspannende boom te bepalen**.