Universiteit Utrecht
Betafaculteit
Examen Discrete Wiskunde op woensdag 4 maart, 10.00-13.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 11 opgaven met in totaal 13 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1 en 9a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord (met een mogelijk bonuspunt op vraag 4). Totaal 50 punten. Het cijfer wordt bepaald door door 5 te delen (met een maximum van 10).
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- **Dringend verzoek van Jeroen Fokker**: vul de Nationale Studenten Enquête in op www.nse.nl.

Succes!

==

Opgave 1.
Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, B, V, H, A). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Geef een uitdrukking voor de kans dat nu worden getrokken: Schoppenaas, schoppenheer, en vier kleine schoppens, 1 kleine harten, 5 kleine ruitens en klaverheer? Een kleintje is hierbij een willekeurige kaart uit $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

Opgave 2
De twee teams die in de reguliere competitie het hoogst zijn geëindigd spelen na afloop een play-off in de vorm van een 'best of $2n + 1$' tegen elkaar: wie het eerst $n + 1$ wedstrijden wint is de eindwinnaar. Iedere expert beschouwt de teams als gelijkwaardig, en derhalve heeft ieder team een kans van 50% om een wedstrijd te winnen, en dus ook om eindwinnaar te worden. Dit is tegen het zere been van de sponsor van Team 1, die natuurlijk wil dat de kans dat zijn/haar team wint zo groot mogelijk is. Na een onderonsje met de leden van de overkoepelende bond weet deze sponsor te regelen dat het team dat na afloop van de reguliere competitie bovenaan staat (laat dat nou net Team 1 zijn) een voordeel krijgt: dit team hoeft slechts n wedstrijden te winnen, terwijl Team 2 wel $n + 1$ wedstrijden moet winnen om eindwinnaar te worden. Bepaal de kans dat Team 1 eindwinnaar wordt; hier **geen sommatie in voorkomen**. Voor iedere losse wedstrijd geldt nog steeds dat beide teams 50% kans hebben om te winnen.

Opgave 3
Er wordt met 4 herkenbare dobbelstenen een worp gedaan. We zijn geïnteresseerd in het aantal mogelijkheden om *in totaal ten hoogste* k te gooien. Bepaal dit aantal door een genererende functie op te stellen, waarbij de coëfficiënt van x^k dit aantal mogelijkheden aangeeft; reken vervolgens de coëfficiënt van x^{15} uit.

Opgave 4
Voor een spelprogramma van het soort Expeditie Poolcirkel moeten twee teams hun krachten meten in een sledérace, waarbij iedere slede met hetzelfde gewicht van zo'n 120 tot 160 kilo wordt beladen (de trekkracht wordt geleverd door de deelnemers zelf). Om aan gewicht te komen worden keien uit de rivierbedding gehaald. Nadat de eerste 10 stenen uit de rivierbedding zijn gehaald, blijkt dat ze allemaal een ander, geheeltallig gewicht hebben; de lichtste weegt 60 kilo en de zwaarste 80 kilo. De (niet zo slimme) presentatrice wil meer stenen (ze denkt dat ze vier stenen nodig hebben die allemaal even zwaar zijn), maar gelukkig zijn er ook mensen bij de productie betrokken die wel na kunnen denken, en ze claimen dat het wel zal lukken met deze tien stenen.

Toon aan dat het met deze combinatie van 10 stenen altijd mogelijk is om beide sleden even zwaar te beladen met een gewicht ≥ 120 en ≤ 160 kilo. U kunt een bonuspunt verdienen door aan te tonen dat 7 stenen ook wel voldoende was geweest.

Opgave 5
Neem aan dat in de onderstaande formule n, m, r, s gegeven natuurlijke getallen zijn. Bepaal x en y in termen van n, m, r, s en geef een **combinatorisch bewijs** van de resulterende formule:

$$\binom{y}{x} = \sum_{k=-m}^{n} \binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k}$$

Opgave 6
Beschouw het KLEINE STOELEN probleem dat als volgt is gedefinieerd. Een groep westerlingen gaat op bezoek in een land als Zuid-Korea. Bij een conferentie staat een rij van n stoelen klaar voor de bezoekers, maar helaas, de grootte van de stoelen levert een beperking op: wanneer een westerling daarop gaat zitten, dan steekt er aan de zijkant wat uit.

(a) Neem aan dat de stoelen zo klein zijn (in verhouding tot de bezoekers) dat het niet mogelijk is dat er twee mensen naast elkaar kunnen zitten. Stel dat er k personen willen gaan zitten op die n stoelen. Bereken het aantal mogelijkheden om die mensen op die n stoelen te plaatsen, zodanig dat er niet twee mensen direct naast elkaar zitten. Ga er hierbij van uit dat de mensen **onherkenbaar** zijn.

(b) Bij nader inzien valt het wel mee: het is wel mogelijk om twee mensen direct naast elkaar plaats te laten nemen, maar drie mensen direct naast elkaar past echt niet. Bepaal de recurrente betrekking a_n die het aantal mogelijke, toegelaten bezettingen van die rij van n stoelen weergeeft; de mensen zijn weer onherkenbaar.

Opgave 7
'In een groen-groen knollenland, zaten twee konijntjes heel parmant'. Twee konijnen is niet zo erg, maar het moeten er niet te veel worden; daarom wordt besloten om ervoor te zorgen dat de stijging van het aantal **geslachtsrijpe** konijnen per periode ten hoogste 5% mag bedragen. Een veldwerker heeft het probleem verkend en heeft de volgende karakteristieken opgesteld:

- Bij de geboorte sterft 30% van de jonge konijnen; de overlevende konijnen heten dan *nieuwe* konijnen.
- Na één periode zijn de konijnen *jong*, maar nog niet geslachtsrijp.
- Konijnen van twee perioden en ouder zijn geslachtsrijp. Ieder paar geslachtsrijpe konijnen zet in iedere periode precies één paar nieuwe konijnen op de wereld.
- Konijnen sterven niet aan ouderdom.

Jagers krijgen de opdracht om in iedere periode q maal 100% van de paren **geslachtsrijpe** konijnen te schieten; dit gebeurt voordat de jongen worden geboren. Hoeveel moet q minstens bedragen om te voldoen aan de eis van maximaal 5% toename per periode?

Tijdlijn. Aan het begin van periode n veranderen de jonge konijnen in geslachtsrijpe konijnen, en de nieuwe konijnen veranderen in jonge konijnen. Ieder paar geslachtsrijpe konijnen zet één paar nakomelingen op de wereld, waarvan 70% het overleeft. Daarna is de jacht op de **geslachtsrijpe** dieren geopend; hierbij wordt q maal 100% van de paren geschoten. Daarna komt de serie gebeurtenissen die horen bij periode $n+1$.

Opgave 8
Het Quicksort algoritme wordt gebruikt om een array van getallen te sorteren. We zijn geïnteresseerd in het gemiddeld aantal stappen C_n voor het sorteren van een array van n getallen. Er geldt dat

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad \text{voor } n \geq 3.$$

Gegeven dat $C_0 = C_1 = 0$ en $C_2 = 3$, geef een uitdrukking voor C_n (hier mag wel een som in voorkomen, maar geen C_i termen).
Hint. Gebruik de sommatie-factor methode.

Opgave 9
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

(a) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 4$ en $a_1 = 6$.

(b) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + 2n$ voor $n \geq 2$ met $a_0 = 2$ en $a_1 = 1$.

Opgave 10.
Los de onderstaande recurrente betrekking op met behulp van een genererende functie.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

Opgave 11.
Bepaal het aantal positieve, gehele getallen ≤ 1000 die aan de volgende eisen voldoen:

- Ze zijn niet deelbaar door 3
- Ze zijn wel deelbaar door 4
- Ze zijn niet deelbaar door 16

Enumeratie kost alleen tijd en levert niets op.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r$$

Binomium
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} x^k.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal $S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$