Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Examen Discrete Wiskunde I-II op vrijdag 29 mei 2015, 14.00-17.00 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Het examen omvat 10 opgaven met in totaal 16 (deel)opgaven.
- Op de vragen 6b-d en 10a kunnen maximaal 2 punten worden gescoord; op de vragen 1, 4a en 6a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 53 punten.
- Bij de opgaven hieronder **behalve bij Opgave 7** mag u er van uitgaan dat u een een algoritme voor Max Flow, Min cost max flow, Kortste pad, Minimale Opspannende boom beschikbaar hebt. Wanneer u dit wilt toepassen hoeft u alleen aan te geven op welke instantie dit moet gebeuren.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).

Succes!

==

Opgave 1.
Iemand gooit één keer met vijf dobbelstenen. Hoe groot is de kans dat er minstens vier dobbelstenen een gelijke uitkomst hebben?

Opgave 2
We willen k niet-negatieve, gehele getallen $x_1, \ldots, x_k$ trekken zodanig dat $x_1 + \ldots + x_k = n$.

(a) Bewijs met behulp van een **combinatorisch** bewijs dat het aantal mogelijkheden hiervoor gelijk is aan $\binom{n+k-1}{k-1}$.
(b) Bewijs (a) met behulp van een genererende functie.

Opgave 3.
Geef een combinatorisch bewijs van de onderstaande gelijkheid.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} = F(n);$$

hierbij is $F(n)$ het $n$de Fibonacci getal, waarbij geldt $F(0) = 1$ en $F(1) = 2$.

Opgave 4.
Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken. Bij (b) zijn de beginwaarden niet gegeven; hier hoeft u de constanten niet uit te rekenen.

(a) $\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ voor $n \geq 1$ met $a_0 = 1$ en $a_1 = 4$.

(b) $\quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2 \cdot 2^n + n$ voor $n \geq 2$ met a_0 en a_1.

Opgave 5
Een citaat uit een willekeurige goedkope avonturenroman.

Het konvooi dat de prinses begeleidde was aangevallen door een horde moordlustige bandieten. Een hevige strijd ontbrandde, waarbij langzaam maar zeker de ridders, die de prinses moesten beschermen, werden uitgeschakeld, totdat uiteindelijk alleen de prinses en haar bedienden nog over waren. De bandieten liepen breed grijnzend op hen af om die ongewapende bedienden om zeep te helpen en de prinses gevangen te nemen. Wat ze niet wisten was dat ieder van de bedienden een kruisboog bij zich had (met helaas maar één pijl) en dat ze daarmee flink hadden geoefend. Verder beschikte de prinses nog over een dodelijk werpmes (waar ze ook goed mee om kon gaan). Toen de bedienden de kruisboog te voorschijn haalden deinsden ze terug, maar toen de roverhoofdman een grote beloning uitloofde voor degene die de prinses gevangen nam, drongen de bandieten op. Daarop schoten alle bedienden tegelijk hun kruisboog af op een willekeurige bandiet; was er maar tijd geweest om het schieten te coördineren ...

Uiteraard loopt het in zo'n verhaal helemaal goed af, maar hoe groot is die kans eigenlijk? Neem aan dat er n bedienden zijn en in totaal k bandieten; bedenk dat de prinses na het salvo nog de beschikking heeft over haar werpmes. Neem verder aan dat iedereen zijn hoofd koel houdt en raak schiet/werpt (en dit schakelt zo'n bandiet volledig uit). Geef aan hoe je die kans kunt berekenen.

Opgave 6.
Gegeven is een ketting met $k = 6$ kralen; deze kralen kunnen drie kleuren krijgen: rood, blauw en wit. Op deze ketting kun je twee soorten permutaties uitvoeren: wel/niet omdraaien en met $0, 1, 2, 3, 4, 5$ plaatsen verschuiven.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (c) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten $w(rood) = r$, $w(blauw) = b$ en $w(wit) = w$, bepaal de pattern inventory (je mag uiteraard machten van $(b + r + w)$ laten staan).
Gegeven de pattern inventory, definieer $Inve(w(rood), w(blauw), w(wit))$ als de waarde van de pattern inventory wanneer je getal $w(rood)$, enz. invoert (bijv. $Inve(2, 2, 2)$ geeft de waarde aan wanneer iedere kleur waarde 2 krijgt). Gebruik deze notatie hieronder. Je mag bij (c) en (d) alleen getallen invullen, en enumeratie levert niets op en kost alleen tijd. **Motiveer uw antwoord**.

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen zonder witte kralen.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen met een even aantal blauwe kralen.

Opgave 7.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

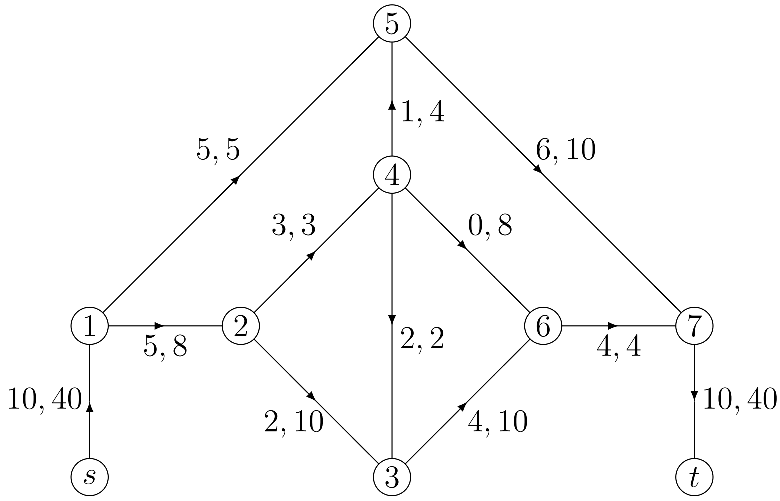

Figure 1: Netwerk.

Opgave 8.
Een aantal studenten is in een willekeurig ski-gebied beland. Het ski-gebied wordt als volgt vertaald in een gerichte acyclische graaf $G = (V, A)$. Ieder begin- en eindpunt van een lift correspondeert met een punt; verder correspondeert ieder punt op de piste waarin je kunt kiezen tussen twee of meer afdalingen met een punt in de graaf. Tussen twee punten v en w loopt een pijl indien het mogelijk is om v naar w te skiën zonder een punt in de graaf te passeren. Punten zonder inkomende pijlen zijn beginpunten; punten zonder uitgaande pijlen zijn eindpunten. Tussen twee punten kunnen verschillende pijlen lopen; die nummer je dan als $(v, w)_1, (v, w)_2$, enz. Definieer q_{vw} als het aantal verschillende pijlen van v naar w. Hernummer de punten in V als $1, \ldots, |V|$ zodanig dat voor iedere pijl $(v, w) \in A$ geldt dat $v > w$ (dit kan omdat de graaf acyclisch is); neem aan dat de m eindpunten nummer $1, \ldots, m$ hebben gekregen. Een afdaling begint bij een beginpunt en eindigt bij een eindpunt; twee afdalingen zijn verschillend indien ze minstens één verschillende pijl bevatten; hierbij tellen $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ als verschillende pijlen.

Geef een algoritme om het aantal verschillende afdalingen te bepalen.

Opgave 9.
Beschouw weer dezelfde situatie als bij Opgave 8, maar neem aan dat nu $q_{vw} = 1$ (dus er is maar één manier om van v naar w te skiën). Het doel van de studenten is om zo mooi mogelijke afdalingen te maken. Daarom wordt bij iedere pijl $(v, w) \in A$ de waardering van de pijl bepaald; gebruik $w(v, w)$ om deze waardering aan te geven.

Geef aan hoe je de afdaling met hoogste totale waardering kunt bepalen.

Opgave 10.
Er is werk aan de winkel. In dit geval zijn er n taken die moeten worden uitgevoerd door twee personen: Koos en Toos. Zowel Koos als Toos hebben hun specialiteit, en de taken die daaronder vallen moeten door de betreffende persoon worden gedaan; de overige taken willen ze zo verdelen dat het verschil in hun totale werktijd zo klein mogelijk is (uiteraard in absolute waarde). Noem dit probleem WERK VERDELEN. Van iedere taak T_i ($i = 1, \ldots, n$) is de bewerkingsduur p_i (neem aan dat dit een niet-negatief geheel getal is) bekend en door wie deze mag worden uitgevoerd (Koos, Toos, of beide).

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN.

(b) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem WERK VERDELEN $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem PARTITIE $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem PARTITIE is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 0, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^k s_k$$

Binomium

Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)x^r.$$