# Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

1 Teken de residuele graaf (zie blad). Bepaal hierin een pad van s naar t : $s \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 7 \to t$
$\to 6$

Capaciteit van dit pad is 2 (capaciteit (3,4)).
De stroom via dit pad verhogen levert de stroom op het antwoordblad. De residuele graaf staat daar onder.
Probeer weer een pad van s naar t te vinden in de residuele graaf: $s \to 1 \to 2 \to 3 \to 6$
Dit levert de snede $S = \{s, 1, 2, 3, 6\}$ en $T = \{4, 5, 7, t\}$ op.
Voorwaartse pijlen van S naar T zijn:
(2,4) (capaciteit 3), (1,5) (capaciteit 5), (6,7) (capaciteit 4)
De totale capaciteit van de snede is 12 = omvang stroom.

2a Permutaties

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\pi_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\pi_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\pi_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\pi_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\pi_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\pi_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\pi_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$\pi_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\pi_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

b Maak er genererende functies van:
$\pi_1 = x_1^8$ ; $\pi_2 = x_4^2$ ; $x_3 = x_2^4$ ; $\pi_4 = x_4^2$ ; $\pi_5 = x_1^6 x_2$ ; $\pi_6 = x_4^2$ ; $\pi_7 = x_2^4$ ;
$\pi_8 = x_4^2$ ; $\pi_9 = x_1^6 x_2$ ; $\pi_{10} = x_4^2$ ; $\pi_{11} = x_2^4$ ; $\pi_{12} = x_4^2$ ; $\pi_{13} = x_1^4 x_2^2$ ; $\pi_{14} = \pi_4^2$ ;
$\pi_{15} = x_2^4$ ; $\pi_{16} = x_4^2$.

# Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

2a) $\pi_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$ $\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$

$\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&6&5&7&8\end{pmatrix}$ $\pi_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&3&4&6&5&7&8\end{pmatrix}$

$\pi_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&5&6&7&8&1&2\end{pmatrix}$ $\pi_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&5&6&7&8&1&2\end{pmatrix}$

$\pi_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&5&6&8&7&1&2\end{pmatrix}$ $\pi_7=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&3&5&6&8&7&1&2\end{pmatrix}$

$\pi_8=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix}$ $\pi_9=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&1&2&3&4\end{pmatrix}$

$\pi_{10}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&6&7&8&2&1&3&4\end{pmatrix}$ $\pi_{11}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&5&7&8&2&1&3&4\end{pmatrix}$

$\pi_{12}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$ $\pi_{13}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$

$\pi_{14}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&8&1&2&4&3&5&6\end{pmatrix}$ $\pi_{15}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&1&2&4&3&5&6\end{pmatrix}$

$\pi_0 = x_1^8$ ; $\pi_1 = x_1^6 x_2$ ; $\pi_2 = x_1^6 x_2$ ; $\pi_3 = x_1^4 x_2^2$

$\pi_4 = x_4^2$ ; $\pi_5 = x_8$ ; $\pi_6 = x_8$ ; $\pi_7 = x_4^2$

$\pi_8 = x_2^4$ ; $\pi_9 = x_2^2 x_4$ ; $\pi_{10} = x_2^2 x_4$ ; $\pi_{11} = x_2^4$

$\pi_{12} = x_4^2$ ; $\pi_{13} = x_8$ ; $\pi_{14} = x_8$ ; $\pi_{15} = x_4^2$

Cykel index: $\frac{1}{16}\left(x_1^8 + 2x_1^6x_2 + x_1^4x_2^2 + 2x_2^4 + 2x_2^2x_4 + 4x_4^2 + 4x_8\right)$

Inve$(r,w,b,z)$ : vul in $x_1=(r+w+b+z)$; $x_2=(r^2+w^2+b^2+z^2)$;
$x_4=(r^4+w^4+b^4+z^4)$ ; $x_8=(r^8+w^8+b^8+z^8)$

Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

Dit levert $\frac{1}{16}\left(x_1^8 + 2x_1^6 x_2 + x_1^4 x_2^2 + 8x_4^2 + 4x_2^4\right)$.

De Pattern Inventory vind je door voor $x_1 = (r+w+b+z)$; $x_2 = (r^2+w^2+b^2+z^2)$, $x_4 = (r^4+w^4+b^4+z^4)$ in te vullen $\Rightarrow$

$$\frac{1}{16}\left[(r+w+b+z)^8 + 2(r+w+b+z)^6(r^2+w^2+b^2+z^2) + (r+w+b+z)^4(r^2+w^2+b^2+z^2)^2 + 8(r^4+w^4+b^4+z^4)^2 + 4(r^2+w^2+b^2+z^2)^4\right]$$

Dit is gelijk aan $\mathrm{Inve}(r,w,b,z)$.

c Je wilt geen rode $\Rightarrow$ kies $w(r)=0$; precies drie witte $\Rightarrow$ kies $w(w)=w$. Het resterende aantal kralen is 5 $\Rightarrow$ vanwege de symmetrie heeft precies de helft van het aantal met 0 rode en 3 witte meer zwarte dan blauwe. Gebruik $w(b)=w(z)=1$ om te tellen $\Rightarrow$ bepaal $\mathrm{Inve}(0,w,1,1)$.
Omdat je precies drie witte wilt $\Rightarrow$ coëfficiënt van $w^3$ kun je termen $x_4^2$ en $x_2^4$ buiten beschouwing laten $\Rightarrow$
$1/16\left(x_1^8 + 2x_1^6x_2 + x_1^4x_2^2\right)$ hoef je alleen te bekijken.
Invullen levert $x_1=(w+2)$; $x_2=(w^2+2)$. Coëfficiënt $w^3 \Rightarrow$

$$1/16\left[(w+2)^8 + 2(w+2)^6(w^2+2) + (w+2)^4(w^2+2)^2\right] \Rightarrow$$

$$1/16\left[w^3 2^5 \cdot \binom{8}{3} + 2w^3 2^3 \cdot \binom{6}{3} \cdot 2 + 2w \cdot 2^5 \binom{6}{5} \cdot w^2 + (w+2)^4(w^4+2w^2+4)\right] \Rightarrow 1/16\left[56w^3 \cdot 2^5 + 20w^3 2^4 + w^3 \cdot 6 \cdot 2^6 + w \cdot 2^3 \cdot \binom{4}{1} \cdot 2w^2 + w^3 \cdot 2\binom{4}{1} \cdot 4\right] = 112w^3 + 20w^3 + 24w^3 + 4w^3 + 2w^3 = 162w^3.$$

Nog delen door 2 $\Rightarrow$ 81 mogelijkheden.

d Geen zwarte $\Rightarrow$ $w(z)=0$. Een even aantal witte $\Rightarrow$ bepaal $\mathrm{Inve}(1,1,1,0)$ en $\mathrm{Inve}(1,-1,1,0)$. $\mathrm{Inve}(1,1,1,0)$ telt het aantal met 0 zwarte; dit is het aantal met een even aantal witte plus het aantal met een oneven aantal witte. $\mathrm{Inve}(1,-1,1,0)$ levert het aantal zonder zwarte met een even aantal witte minus het aantal zonder zwarte met een oneven aantal witte. (want een equivalentieklasse met een even aantal witte levert $+1$ op en eentje met een oneven aantal witte levert $-1$ op.
Dus $\left[\mathrm{Inve}(1,1,1,0) + \mathrm{Inve}(1,-1,1,0)\right]/2$.

Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

3a Gebruik DP. Definieer $f_t(v)$ als de maximale opbrengst die behaald kan worden aan het eind van periode t, waarna je nog v eenheden in voorraad hebt.

Initialisatie: $f_t(v) = \begin{cases} 0 & \text{als } v = t = 0 \\ -\infty & \text{anders} \end{cases}$

De eindwaarde kun je bepalen als $f_T(0)$, want het is nooit optimaal om voorraad over te houden, aangezien je dan beter wat minder kunt inkopen. De oplossing kun je vinden door backtracking.

Nu de recurrente betrekking. Om v aan voorraad te hebben aan het eind van periode t+1 moet je, uitgaande van een eindvoorraad $v'$ ($>0$), j stuks kopen met $v = v' - 1 + j - d_{t+1}$, dus $j = v + d_{t+1} - v' + 1$. Hierbij moet gelden $0 \leq j \leq m_{t+1}$. Als je eindvoorraad 0 hebt, dan moet je $j = v + d_{t+1}$ kopen. De recurrente betrekking wordt dan voor het geval $v + d_{t+1} \leq m_{t+1}$:

$$f_{t+1}(v) = \max_{l \leq v' \leq u} \left\{ f_t(v') + q_{v_{t+1}} - c_{t+1}(v + d_{t+1} - v' + 1),\ f_t(0) + q_{v_{t+1}} - c_{t+1}(v + d_{t+1}) \right\}$$

Omdat $0 \leq v + d_{t+1} - v' + 1 \leq m_{t+1}$ moet gelden $l \leq v' \leq u$, met $l = v + d_{t+1} + 1 - m_{t+1}$ en $u = v + d_{t+1} + 1$.

Indien $v + d_{t+1} > m_{t+1}$, dan vervalt de laatste term.

b Het enige dat verandert is de rentebetaling. Indien $c_{t+1}(v + d_{t+1} - v' + 1) > f_t(v')$, dan moet je 5% over het verschil betalen, dus je betaalt een bedrag

$\text{rente}(v, v') \equiv \max\{ c_{t+1}(v + d_{t+1} - v' + 1) - f_t(v'), 0 \}/20$.

Voor het geval zonder voorraad betaal je $\text{rente}(v) \equiv \max\{ c_{t+1}(v + d_{t+1}) - f_t(0), 0\}/20$. De recurrente betrekking wordt dan

$$f_{t+1}(v) = \max_{l \leq v' \leq u} \left\{ f_t(v') + q_{v_{t+1}} - c_{t+1}(v + d_{t+1} - v' + 1) - \text{rente}(v, v'),\ f_t(0) + q_{v_{t+1}} - c_{t+1}(v + d_{t+1}) - \text{rente}(v) \right\}$$

als $d_{t+1} + v \leq m_{t+1}$ en

$$f_{t+1}(v) = \max_{l \leq v' \leq u} \left\{ f_t(v') + q_{v_{t+1}} - c_{t+1}(v + d_{t+1} - v' + 1) - \text{rente}(v, v') \right\},$$

anders. De rest blijft gelijk.

Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

4a Beslissingsvariant: Gegeven een instantie van ZGMH en een grenswaarde $y$, bestaat er een toegelaten oplossing met uitkomstwaarde $\geq y$?

Om tot de klasse NP te behoren moet je een 'ja' oplossing in polynomiale ruimte kunnen opslaan, en moet je in polynomiale tijd na kunnen gaan of deze oplossing tot 'ja' leidt.

b Ga uit van een willekeurige instantie van Partitie. Voer voor ieder getal $a_j$ een klant $j$ in met $b_j = 0$, $e_j = 2A+1$ en $p_j = a_j$. Voer verder nog een dummy klant $o$ in met $b_o = A$, $e_o = A+1$ en $p_o = 1$. Kies $y = n+1$ (je moet dus alle klanten helpen). Dit levert de instantie van BVZGMH op.
Als Partitie 'ja' is, dan kun je een 'ja' oplossing creëren door van tijdstip $0$ t/m $A$ de taken in $S$ uit te voeren, dan taak $o$, en tot slot de resterende taken.
Stel dat BVZGMH tot 'ja' leidt. De totale werktijd is $2A+1 \Rightarrow$ geen idle time in de oplossing. Taak $o$ moet van $A$ t/m $A+1$ $\Rightarrow$ in interval $[0, A]$ is de medewerker continu bezig en voert daarin een verzameling $S \subset \{1, \dots, n\}$ van taken volledig uit. Wegens $p_j = a_j \; \forall j \in S$ geldt dan
$\sum_{j \in S} a_j = \sum_{j \in S} p_j = A$, dus ook 'ja' op Partitie.

c Herhaal de bovenstaande constructie voor het interval $[2A+1, 4A+2]$. Als Partitie tot 'ja' leidt, dan bestaat er een oplossing met waarde $4n+2$; als Partitie tot 'nee' leidt, dan bestaat er een oplossing met waarde $\leq 4n$. Als zo'n algoritme zou bestaan, dan kun je in polynomiale tijd checken of er een oplossing is met waarde $\geq 4n+1$ of met waarde $\leq 4n$, dus of Partitie tot 'ja' of 'nee' leidt.

Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

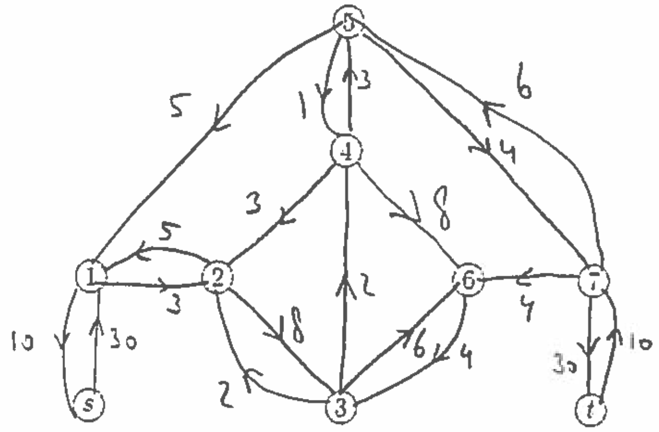
5 Construeer de volgende graaf $G=(V,A)$. Voer voor iedere klant $j$ een punt $j$ in en verder nog twee dummy punten $s$ en $t$. Tussen $i$ en $j$ zit een pijl $(i,j)$ indien $j$ na $i$ kan worden uitgevoerd, dus als $e_i \leq b_j$. Verder nog pijlen $(s,j)$ $\forall j$ en $(j,t)$ $\forall j$. De lengte van pijl $(i,j)$ bedraagt $-o_j$; de lengte van $(s,i)$ bedraagt $-o_i$. Ieder plan correspondeert met $(s,t)$ pad in deze graaf en omgekeerd; de lengte van het pad is minus de totale opbrengst van het corresponderende plan. De graaf is acyclisch, dus je kunt het kortste pad probleem oplossen met Bellman-Ford.

6 Een route van een robot kun je zien als een stroom van omvang 1 per keer; het ophalen correspondeert met een stroom naar $t$ toe, waarna je weer een nieuwe eenheid stroom stuurt. Je wilt dat door iedere pijl minstens één eenheid stroom gaat $\Rightarrow$ ondergrens op de stroom van 1; er is geen bovengrens. De kosten bedragen $Q$ per eenheid stroom plus $l(v,w)$ per eenheid stroom door $(v,w)$. De kosten voor de inspectie kun je op 0 zetten, want het is verplicht. Je moet nog afdwingen dat door iedere pijl $(v,w)$ een stroom van minstens 1 gaat. Splits $(v,w)$ op in pijl $(v,w)_1$ met capaciteit 1 en kosten $-M$ en in pijl $(v,w)_2$ met capaciteit $\infty$ en kosten $l(v,w)$. Neem de graaf $G=(V,A)$ en voeg een dummy $s'$ toe met pijl $(s',s)$ met kosten $Q$ en capaciteit $\infty$ en een dummy $t$ met pijlen $(v,t)$ $(\forall v \in V)$ met kosten 0 en capaciteit $\infty$. Splits de pijlen $(v,w)$ als boven beschreven. Verhoog nu steeds de stroom zolang de kosten lager worden (kies $M$ zo groot dat de kosten altijd $<0$ zijn als je een eenheid stroom door $(v,w)_1$ kunt sturen); wanneer de kosten van het goedkoopste stroomvermeerderende pad $>0$ worden, dan stop je (zonder de stroom te verhogen over dit pad). Nu heeft iedere pijl $(v,w)$ een stroom van 1 erdoor en de totale kosten van de stroom zijn minimaal.

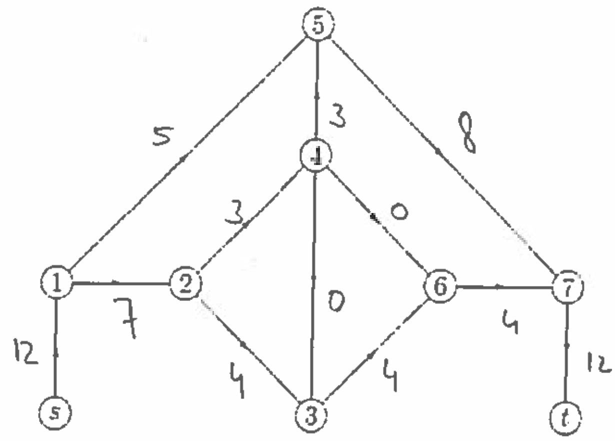
Uitwerking tentamen DW 13-4-2017

7 Stel dat Prim-Dijkstra niet de optimale MST vindt. Dan is er een boom $T'$ met lagere totale lengte dan $T$ (boom van Prim-Dijkstra). Voer het algoritme van Prim-Dijkstra uit en kijk wanneer er voor de eerste keer een kant aan $T$ wordt toegevoegd die niet in $T'$ voorkomt. Stel dat $\{v,w\}$ in $T$ wordt toegevoegd en dat je dan verzameling $V'$ hebt, met $v \in V'$. Voeg $\{v,w\}$ toe aan $T'$ $\Rightarrow$ cykel. Omdat de kanten binnen $V'$ ook in $T'$ zitten (het eerste verschil deed zich voor bij $\{v,w\}$) moet er in dit cykel een kant zijn die uit $x \in V'$ naar $y \notin V'$ gaat. Er geldt $\ell(x,y) \geq \ell(v,w)$ vanwege de keus van $\{v,w\}$ door Prim-Dijkstra. Vervang $(x,y)$ door $(v,w)$ in $T'$ en ga door als $\ell'(x,y) = \ell(v,w)$! Enz.

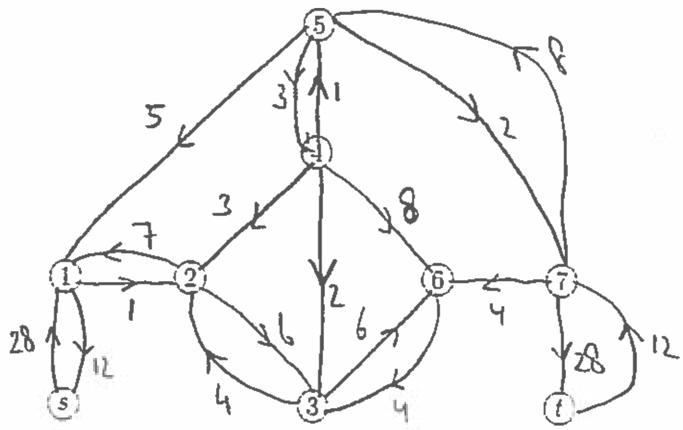
**Opgave 1**




Residuele graaf




Nieuwe graaf (alleen stroom, geen capaciteiten)




Nieuwe residuele graaf