Wiskundige Technieken 1
Uitwerkingen Tentamen 4 november 2013

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met 1 of 2 onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	wel begrepen, maar slordig uitgevoerd, details niet goed in de vingers, of slechte notaties
2pt	grote lijn begrepen maar struikelt in de uitwerking; onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. a. We berekenen eerst de poolcoördinaten van z en w apart:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \\
|w| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2, \\
\arg(z) &= \arctan\left(\frac{-1/2}{1/2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \\
\arg(w) &= \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

Voor het product zw volgt nu:

$$\begin{aligned}
|zw| &= |z| \cdot |w| = \sqrt{2}, \\
\arg(zw) &= \arg(z) + \arg(w) = -\frac{5}{12}\pi,
\end{aligned}$$

en dus is het antwoord $zw = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

Alternatieve oplossing:
We kunnen ook het product zw in rechthoekscoördinaten berekenen (dit geeft $zw = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$) en dit daarna omzetten naar poolnotatie. De modulus is prima te berekenen:

$$|zw| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2},$$

maar het argument is een arctangens die slechts weinigen uit het hoofd zullen kennen:

$$\arg(zw) = \arctan\left(\frac{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\right) = -\frac{5}{12}\pi.$$

b. Enerzijds geldt

$$e^{i2x} = \cos 2x + i \sin 2x.$$

Anderzijds geldt ook

$$\begin{aligned}
e^{i2x} &= \left(e^{ix}\right)^2 \\
&= (\cos x + i \sin x)^2 \\
&= \cos^2 x + 2i \sin x \cos x - \sin^2 x.
\end{aligned}$$

Deze twee uitdrukkingen zijn gelijk aan elkaar, dus zijn de reële delen gelijk en de imaginaire delen gelijk. Hieruit volgen de bekende formules

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x.
\end{aligned}$$

2. De helling van de raaklijn in $(a, 1/a)$ is de afgeleide in $(a, 1/a)$. De afgeleide is $-\frac{1}{x^2}$, dus is de helling $-\frac{1}{a^2}$ en dus is de vergelijking van de raaklijn $y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a)$. De snijpunten met de coördinaatassen vinden we door één van x en y gelijk aan nul te stellen en de overgebleven variabele uit de zo ontstane vergelijking op te lossen. Uit $x = 0$ volgt:

$$y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} \cdot -a = \frac{2}{a}.$$

Uit $y = 0$ volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} &= 0, \\ -\frac{x}{a^2} &= -\frac{2}{a}, \\ x &= 2a. \end{aligned}$$

De driehoek waarvan we de oppervlakte moeten bepalen is de rechthoekige driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(2a, 0)$ en $(0, 2/a)$, waarvan de oppervlakte precies $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = 2$ is. We zien dat de oppervlakte niet afhangt van het punt waaraan we de raaklijn trekken.

3. a. Het helpt om steeds de afgeleiden zoveel mogelijk te vereenvoudigen met behulp van creatief niets doen (voor de vierde afgeleide is dit niet belangrijk). De afgeleiden zijn:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot -2x = -x(1-x^2)^{-1/2}, \\ f''(x) &= -(1-x^2)^{-1/2} + -x \cdot -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot -2x \\ &= \frac{-1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{-x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{-1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{1-x^2}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{-1}{(1-x^2)^{3/2}} = -(1-x)^{-3/2}, \\ f'''(x) &= -\frac{3}{2} \cdot -(1-x^2)^{-5/2} \cdot -2x = -3x(1-x^2)^{-5/2}, \\ f''''(x) &= -3(1-x^2)^{-5/2} + -3x \cdot -\frac{5}{2}(1-x^2)^{-7/2} \cdot -2x \\ &= \frac{-3}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{-15x^2}{(1-x^2)^{7/2}} \\ &= \frac{-3}{(1-x^2)^{5/2}} + \frac{3-3x^2}{(1-x^2)^{7/2}} + \frac{-3-12x^2}{(1-x^2)^{7/2}} = \frac{-3-12x^2}{(1-x^2)^{7/2}}, \end{aligned}$$

en dus $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$ en $f''''(0) = -3$. Verder is $f(0) = 1$ en dus is het vierde orde Taylorpolynoom van $f(x)$ precies

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f''''(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4.$$

Alternative oplossing:
Wie geen zin heeft om vier afgeleiden te bepalen kan het wat slimmer aanpakken en zich zo wat rekenwerk besparen. We laten hier één manier zien waarop dat kan. Bekijk de functie $g(u) = \sqrt{1-u}$ (dit is $f(x)$ met de substitutie $u = x^2$). De afgeleiden van $g(u)$ zijn:

$$\begin{aligned} g'(u) &= \frac{1}{2}(1-u)^{-1/2} \cdot -1 = -\frac{1}{2}(1-u)^{-1/2}, \\ g''(u) &= \frac{1}{4}(1-u)^{-3/2} \cdot -1 = -\frac{1}{4}(1-u)^{-3/2}, \end{aligned}$$

en dus $g'(0) = -\frac{1}{2}$ en $g''(0) = -\frac{1}{4}$. Verder is $g(0) = 1$ en dus is het tweede orde Taylorpolynoom van $g(u)$ in het steunpunt $u = 0$ gelijk aan

$$g(0) + \frac{g'(0)}{1!}u + \frac{g''(0)}{2!}u^2 = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2.$$

Substitueer nu $u = x^2$ in deze uitdrukking, dan vinden we

$$1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4,$$

wat precies het vierde orde Taylorpolynoom van $f(x)$ is in het steunpunt $x = 0$.

b. Aangezien $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ vullen we $x = \frac{1}{2}$ in. Dan vinden we:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{128} = \frac{111}{128}.$$

4. De afgeleide is per definitie

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Deze laatste limiet bepalen we met behulp van de insluitstelling. Omdat $-1 \le \sin\frac{1}{h} \le 1$ en omdat $\lim_{h\to 0} -h = 0$ en $\lim_{h\to 0} h = 0$, volgt uit de insluitstelling dat $\lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$. We concluderen dat $f'(0) = 0$.

5. We berekenen eerst de integraal zonder grenzen met behulp van partiële integratie. Stel $U = x$ en $\mathrm{d}V = e^{-x}\,\mathrm{d}x$, dan volgt $\mathrm{d}U = \mathrm{d}x$ en $V = -e^{-x}$ en dus:

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x}, \end{aligned}$$

waarbij we de integratieconstante weglaten omdat die geen invloed heeft op de gevraagde oneigenlijke integraal. De gevraagde integraal is

$$\begin{aligned} \int_0^\infty xe^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R xe^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{R\to\infty} \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty} -(R+1)e^{-R} + 1 = 1. \end{aligned}$$

6. a. We kunnen netjes de methode van het boek volgen en de substitutie $2x = \sin t$ toepassen, maar waarom zouden we als het veel simpeler kan? Neem de substitutie $u = 1 - 4x^2$, dan volgt $\mathrm{d}u = -8x\,\mathrm{d}x$, $x^2 = \frac{1-u}{4}$ en dus:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{32}\int \frac{1-u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{32}\int \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{48}u^{3/2} - \frac{1}{16}u^{1/2} + C \\ &= \frac{1}{48}\left(1-4x^2\right)^{3/2} - \frac{1}{16}\left(1-4x^2\right)^{1/2} + C. \end{aligned}$$

b. Gebruik de substitutie $u = \frac{1}{x}$, $\mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, dan volgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x &= -\int e^u\,\mathrm{d}u \\ &= -e^u + C = -e^{1/x} + C. \end{aligned}$$

c. Merk op dat

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2-(2x+1)}{x^2+2x+2} = 1 - \frac{2x+1}{x^2+2x+2}.$$

Bovendien heeft de noemer geen nulpunten (want $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$), dus kunnen we niet breuksplitsen. We vinden:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x &= \int 1 - \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int 1 - \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Gebruik nu de substitutie $u = x + 1$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, dan volgt:

$$\begin{aligned}
\int 1 - \frac{2x+1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int 1 - \frac{2u-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int 1 - \frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= u - \log\left(u^2+1\right) + \arctan u + C \\
&= x + 1 - \log\left(x^2+2x+2\right) + \arctan(x+1) + C.
\end{aligned}$$

7. a. De snelste manier om dit aan te tonen is met behulp van de gelijkheid

$$\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 = \left(f'(x) + f(x)\right)\left(f'(x) - f(x)\right).$$

De afgeleide is $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en dus volgt dat $f'(x) + f(x) = e^x$ en $f'(x) - f(x) = e^{-x}$. Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned}
\left(f'(x)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2 &= \left(f'(x) + f(x)\right)\left(f'(x) - f(x)\right) \\
&= e^x \cdot e^{-x} = 1.
\end{aligned}$$

b. Omdat zowel e^x als e^{-x} overal positief zijn, volgt dat $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ook overal positief is. De functie $f(x)$ is dus strikt stijgend en heeft dus een inverse.

c. Verwissel x en y en probeer opnieuw y uit te drukken in x. Met behulp van creatief niets doen vinden we dan:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{\left(e^y\right)^2 - 1}{2e^y}, \\
2xe^y &= \left(e^y\right)^2 - 1.
\end{aligned}$$

Stel nu voor het gemak even $u = e^y$, dan volgt:

$$\begin{aligned}
2xu &= u^2 - 1, \\
u^2 - 2xu - 1 &= 0, \\
u &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Omdat e^y nooit negatief is en omdat $\sqrt{x^2+1} > x$, volgt dat $x - \sqrt{x^2+1}$ geen oplossing kan zijn. Dus:

$$\begin{aligned}
u &= x + \sqrt{x^2+1}, \\
e^y &= x + \sqrt{x^2+1}, \\
y &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),
\end{aligned}$$

waar in de laatste stap geen absoluutstrepen nodig zijn omdat $\sqrt{x^2+1} > x$ voor alle x en dus $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ voor alle x. We concluderen dat

$$f^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

8. a. We vullen de gegeven oplossing in in de vergelijking:

$$\begin{aligned}
y'' + 2y' + 5y &= \left(-\frac{3}{5}\cos x - \frac{3}{10}\sin x\right) + 2\left(-\frac{3}{5}\sin x + \frac{3}{10}\cos x\right) + 5\left(\frac{3}{5}\cos x + \frac{3}{10}\sin x\right) \\
&= \left(-\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + 3\right)\cos x + \left(-\frac{3}{10} - \frac{6}{5} + \frac{15}{10}\right)\sin x \\
&= 3\cos x.
\end{aligned}$$

We concluderen dat de gegeven particuliere oplossing inderdaad een particuliere oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is.

b. We lossen eerst de homogene vergelijking op. De vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ heeft als oplossingen $\lambda = -1 \pm 2i$ (volgt uit de *abc*-formule of via kwadraatafsplitsen) en dus is de homogene oplossing

$$y_H = Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x.$$

De totale oplossing is dus

$$y(x) \;=\; Ae^{-x}\cos 2x + Be^{-x}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{3}{10}\sin x.$$

Uit de eerste randvoorwaarde volgt

$$0 \;=\; y(0) \;=\; A + \frac{3}{5} \quad \rightarrow \quad A \;=\; -\frac{3}{5}.$$

Uit de tweede randvoorwaarde volgt

$$\frac{13}{10} \;=\; y\left(\frac{\pi}{4}\right) \;=\; Be^{-\pi/4} + \frac{3}{10}\sqrt{2} + \frac{3}{20}\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad B \;=\; e^{\pi/4}\left(\frac{13}{10} - \frac{9}{20}\sqrt{2}\right).$$

De oplossing van het randvoorwaardeprobleem is dus:

$$y \;=\; -\frac{3}{5}e^{-x}\cos 2x + e^{\pi/4}\left(\frac{13}{10} - \frac{9}{20}\sqrt{2}\right)e^{-x}\sin 2x + \frac{3}{5}\cos x + \frac{3}{10}\sin x.$$

9. Het domein van f bestaat uit alle punten x die voldoen aan zowel $3x \geq 0$ als $4-\sqrt{3x} > 0$. Uit de eerste ongelijkheid volgt $x \geq 0$. De vergelijking $4 - \sqrt{3x} = 0$ heeft als oplossing $x = \frac{16}{3}$ en voor $x < \frac{16}{3}$ is $4 - \sqrt{3x}$ positief, dus volgt dat het domein van $f(x)$ gelijk is aan $[0, \frac{16}{3})$. Er zijn geen horizontale of schuine asymptoten, maar mogelijk wel een verticale asymptoot bij $x = \frac{16}{3}$. Daarvoor bepalen we de limiet $\lim_{x\uparrow\frac{16}{3}} f(x)$. Als $x \uparrow \frac{16}{3}$, dan $4 - \sqrt{3x} \downarrow 0$ en dus $\log\left(4 - \sqrt{3x}\right) \downarrow -\infty$, wat betekent dat $\lim_{x\uparrow\frac{16}{3}} f(x) = -\infty$ en dus is $x = \frac{16}{3}$ een verticale asymptoot van $f(x)$. Het snijpunt met de y-as is $(0, \log 4)$. Voor snijpunten met de x-as lossen we op:

$$\begin{aligned} \log\left(4 - \sqrt{3x}\right) &= 0, \\ 4 - \sqrt{3x} &= 1, \\ 3 &= \sqrt{3x}, \\ x &= 3, \end{aligned}$$

dus is er één snijpunt met de x-as, namelijk $(3, 0)$.

De afgeleide is

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{4-\sqrt{3x}} \cdot -\frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3 \;=\; \frac{-3}{8\sqrt{3x} - 6x}.$$

De afgeleide is nergens nul, dus heeft f geen lokale extrema. De afgeleide bestaat niet in alle punten x die voldoen aan $8\sqrt{3x} - 6x = 0$. Deze vergelijking lossen we op:

$$\begin{aligned} 8\sqrt{3x} - 6x &= 0, \\ 8\sqrt{3x} &= 6x, \\ 192x &= 36x^2, \\ x = 0 \quad \text{of} \quad 36x &= 192, \\ x &= \frac{192}{36} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

De afgeleide is continu, dus is deze op het interval $[0, \frac{16}{3})$ ofwel overal positief, ofwel overal negatief (vanwege de tussenwaardestelling en het feit dat $f'(x)$ nooit nul is). Vullen we nu een punt uit het domein van f in, bijvoorbeeld $x = 3$, dan zien we dat de afgeleide negatief is ($f'(3) = -\frac{1}{2}$), dus is f overal strikt dalend. Verder zien we dat de grafiek verticaal loopt bij $x = \frac{16}{3}$ (dat wisten we al want dat is een verticale asymptoot van f) en ook bij $x = 0$.

Tenslotte bekijken we de tweede afgeleide. Deze is:

$$f''(x) \;=\; -\frac{-3 \cdot (8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6)}{\left(8\sqrt{3x} - 6x\right)^2} \;=\; \frac{12\sqrt{3} - 18\sqrt{x}}{\left(8\sqrt{3x} - 6x\right)^2\sqrt{x}}.$$

Deze bestaat niet in 0 en $\frac{16}{3}$ (klopt met wat we al wisten). We bepalen eventuele buigpunten van f:

$$\begin{aligned}
12\sqrt{3} - 18\sqrt{x} &= 0,\\
18\sqrt{x} &= 12\sqrt{3},\\
\sqrt{x} &= \frac{2}{3}\sqrt{3},\\
x &= \frac{4}{9}\cdot 3 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Er is dus één buigpunt, namelijk $\left(\frac{4}{3}, \log 2\right)$ en de afgeleide in dit punt is $f'(\frac{4}{3}) = -\frac{3}{8}$. Op $(0, \frac{4}{3})$ is de tweede afgeleide positief en op $(\frac{4}{3}, \frac{16}{3})$ is de tweede afgeleide negatief, de grafiek is dus convex op het interval $(0, \frac{4}{3})$ en concaaf op het interval $(\frac{4}{3}, \frac{16}{3})$.

We vatten alles samen in het volgende schema:

x	0		4/3		3		16/3
$f(x)$	+	+	+	+	0	−	
$f'(x)$		−	−	−	−	−	
$f''(x)$		+	0	−	−	−	
			buigpunt				asymptoot

De grafiek ziet er als volgt uit: