1)

Uitwerking Tentamen Wisk. Techn. 1 5/11/12

Normering 4-pts vragen (andere naar rato)

4 pt - goed begrepen & goed uitgevoerd, evt met 1 of 2 onbelangrijke rekenfoutjes.

3 pt - wel begrepen maar slordig uitgevoerd, details niet goed in de vingers, of slechte notaties

2 pt - grote lijn begrepen maar struikelt in de uitwerking; onvoldoende vaardigheid / controle / zelfreflectie

1 pt - aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op

0 pt - geen idee wat te doen, dit wordt niks.

---

(1) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{RQ}$ impliceert $(\bar{p}-\bar{q})\cdot(\bar{r}-\bar{q}) = 0$.

$$(\bar{p}-\bar{q}) = (2-q)i + j + 3k$$

$$(\bar{r}-\bar{q}) = (-q)i + 3j - 6k$$

$(\bar{p}-\bar{q})\cdot(\bar{r}-\bar{q}) = 0$ geeft de kwadr. vgl $q^2-2q-15=0$ met opl. $q=-3$ of $q=5$ dus

$\bar{q} = (-3,0,0)$ en $\bar{q} = (5,0,0)$ voldoen.

2) a $z^3 = 8$ dus $z = 2$ is een opl. van $z^3 - 8 = 0$.
Uitdelen: $\frac{z^3 - 8}{z - 2} = z^2 + 2z + 4$, nulpunten vinden (met kwadraat afsplitsen of abc) geeft $z = -1 \pm \sqrt{3}\, i$. Dus de opl. zijn $z = 2$, $z = -1 - \sqrt{3}\, i$, $z = -1 + \sqrt{3}\, i$.

Anders: deel de vgl. door 8, dan krijg je het cyclotomisch polynoom $w^3 - 1 = 0$ (met $w = \frac{z}{2}$) en de opl. zijn $w = e^{\frac{2k\pi}{3} i}$ $(k = 0, 1, 2)$
oftewel $z = 2e^0 = 2$,
$z = 2e^{\frac{2\pi}{3} i} = -1 + \sqrt{3}\, i$
$z = 2e^{\frac{4\pi}{3} i} = -1 - \sqrt{3}\, i$

---

b Vgs. defn. van e^{iz} geldt
$$e^{i(x-y)} = \cos(x-y) + i \sin(x-y) \qquad (1)$$
en ook
$$e^{ix} e^{-iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y - i \sin y) \qquad (2)$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y - \cos x \sin y)$$
Aangezien $e^{i(x-y)} = e^{ix} e^{-iy}$ moeten reële en img. delen van ~~de~~ (1) en (2) gelijk zijn, zodat
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
(Je kunt dit ook vinden door uitwerken van $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ en uiteindelijk $-y$ nemen ipv y)

3) Taylorformule:

a). $$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(N+1)}(s)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

hier met $f(x) = \log(1+x)$, $a=0$, $N=4$; $f(0)=0$

De afgeleides zijn

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0)=1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f''(0)=-1$$

$$f'''(x) = \frac{+2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0)=2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0)=-6$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

Invullen geeft

$$f(x) = 0 + \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{2\cdot 3}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \frac{4!}{5!}\frac{x^5}{(1+s)^5}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{1+s}\right)^5$$

met $|s-a| \leq |x-a|$

b). Kies $x=-\frac{1}{2}$:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{4\cdot 16} + \frac{1}{5\cdot 32}\left(\frac{1}{1+s}\right)^5$$

$\approx -\frac{131}{192}$ en de restterm is op z'n slechtst voor $s=-\frac{1}{2}$: $\frac{1}{5\cdot 32}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{1}{5}$

4) $f(x) = \log \dfrac{2x}{(x-4)^2}$

Merk op dat ook $f(x) = \log(2x) - 2\log(x-4)$.

Domein: de breuk $\dfrac{2x}{(x-4)^2}$ moet strikt positief en gedefinieerd zijn, dus $D_f = (0,4) \cup (4, \to)$ (of andere goede notaties)

Nulpt: $\log(y) = 0$ als $y = 1$;

$$\frac{2x}{(x-4)^2} = 1 \quad \text{als} \quad 2x = (x-4)^2$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-5)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$x = 2 \text{ of } x = 8$$

(Snijpt met Y-as is er niet; $0 \notin D_f$)

Limietgedrag:

$\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{2x}{(x-4)^2} = 0$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} \log x = -\infty \rightsquigarrow$ vert. ast. bij $x = 0$

$\lim\limits_{x \uparrow 4} \dfrac{2x}{(x-4)^2} = +\infty$ en $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

$\lim\limits_{x \downarrow 4} \dfrac{2x}{(x-4)^2} = +\infty$ en $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$

$\to$ vert. ast. bij $x = 4$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{(x-4)^2} = 0$ en $\lim\limits_{x \to \infty} \log x = -\infty$ $\to$ $f(x) \to -\infty$ als $x \to +\infty$

4) Bis

Afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-4} = -\frac{+x+4}{x(x-4)}$$

$f'(x) \neq 0$ op D_f.

$f'(2) = +\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\rightsquigarrow$ f stijgend in $x=2$

$f'(8) = \frac{12}{32} = -\frac{3}{8}$ $\rightsquigarrow$ f dalend in $x=8$

Tweede afgeleide:

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2-(x-4)^2}{x^2(x-4)^2} = \frac{x^2+8x-16}{x^2(x-4)^2}$$

$f''(x)=0$ als $x^2+8x-16=0$

$(x+4)^2 = 32$

$x \cancel{+4} = -4 \pm 4\sqrt{2}$

Hiervan ligt $x = 4(\sqrt{2}-1) \approx 1{,}6$ in D_f. (*) → zoz.

Tekenschema

x	0		$4(\sqrt{2}-1)$		2		4		8	
f	⚡		−		0	+	⚡	+	0	−
f'			+		$3/2$	+		−	$-3/8$	−
f''			0			+		+		+

4) bisBis

⊛→ Er is een buigpunt bij $x = 4(\sqrt{2}-1)$ omdat daar f'' van teken wisselt.

De raaklijn heeft daar helling

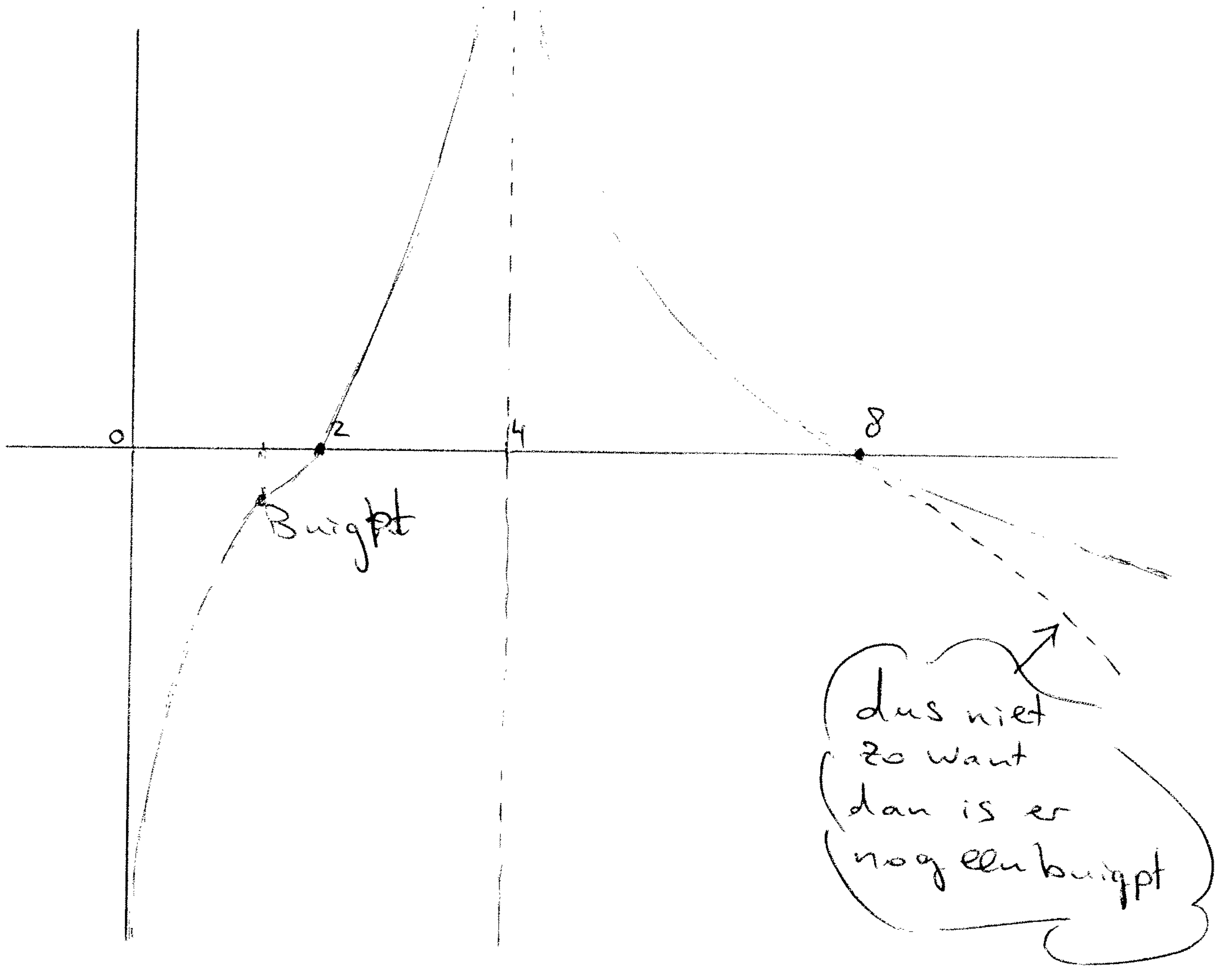
$$f'(4(\sqrt{2}-1)) = 2\sqrt{2}+3$$

De functie waarde is daar

$$f(4(\sqrt{2}-1)) = \log \frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

Dit is niet heel belangrijk om uit te rekenen.

<u>Grafiek:</u> (Y-as niet op schaal)



5)

a). Kromme snijdt y-as als $x=0$ dwz $t^3-kt=0$, dus $t=0$, $t=-\sqrt{k}$, $t=+\sqrt{k}$, met y coord. resp $y=1$, $y=\frac{1}{k+1}$, $y=\frac{1}{k+1}$.

Er zijn dus twee snijpt met y-as nl. $(0,1)$ en $(0,\frac{1}{k+1})$; in het tweede pt. komt de kromme 2 keer.

b). In een keerpunt is $\dot{x}=0$ $\dot{y}=0$ en $\frac{dy}{dx}$ niet gedefinieerd

$$\dot{x}=3t^2-k=0 \text{ als } t=\pm\sqrt{\frac{k}{3}} \;(\neq 0 \text{ omdat } k\neq 0)$$

$$\dot{y}=\frac{-2t}{(t^2+1)^2}=0 \text{ als } t=0.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{-2}{3t\,(t^2+1)^2}$$

$$\lim_{t\uparrow 0}\frac{dy}{dx}=+\infty \text{ en } \lim_{t\downarrow 0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

dus $\lim\limits_{t\to 0}\frac{dy}{dx}$ bestaat niet.

Er is dus aan alle voorwaarden van een keerpunt voldaan.

6)

a) Partieel (met $u' = e^{-x}$ en $v = \sin 2x$ of andersom)

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x \, dx$$

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x \, dx$$

dus

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{5} e^{-x} \left(\sin 2x + 2 \cos 2x \right) + c.$$

b). Subs $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$.

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c$$

$$= \arctan(\sin x) + c.$$

---

7) Zie boek, § 7.3, Example 5

---

8) a) Als $x \downarrow 1$ dan $\log x \downarrow 0$ en $x^2 - 1 \downarrow 0$, pas l'Hopital toe:

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

dus de lim bestaat.

8b) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$.

$g'(x) = 0$ als $x = 4$

$g'(x) < 0$ als $x < 4$ en $g'(x) > 0$ als $x > 4$

Dus g heeft lok. minimum $g(4) = \sqrt{4} - \log 4 =$

$= 2(1 - \log 2) > 0$ (immers, $1 = \log e$ en $e > 2$)

<u>Randextreem:</u>

$g(1) = \sqrt{1} - \log 1 = 1 > 0$

g is diffbaar op $[1, \to)$ dus geen knikken.

~~$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} - \log x$~~

Aangezien $g(x)$ continu is op $[1, \to)$ en strikt stijgend is voor $x > 4$ en strikt dalend voor $1 \leq x < 4$ is $g(4)$ ook globaal minimum. IHB is $g(x) > 0$.

c) (i) $\int_1^2 f(x)\,dx$ is oneigenlijk omdat $f(x)$ niet gedefinieerd is in randpunt $x = 1$; maar $\lim_{x\downarrow a} \int_a^2 f(x)\,dx$ bestaat omdat $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ bestaat.

(of: je <u>definieert</u> $f(1) := \frac{1}{2}$ en dan is de integraal niet meer oneigenlijk.)

~~(ii) $\int_2^\infty f(x)\,dx < \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$ (vanwege (b))~~

(ii) Vanwege (b) is $\log x < \sqrt{x}$ op $[1,\infty)$

en dus ook $\dfrac{\log x}{x^2-1} < \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ op $(1,\infty)$

Dan geldt dat

$$\int_2^\infty f(x)\,dx < \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx < \int_2^\infty \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

$= 2\int_2^\infty x^{-3/2}\,dx$; dit is een standaard conv. integraal (st. 6.5.2 boek).

(iii) Conclusie: $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty f(x)\,dx$

is convergent omdat beide $\int$ aan de rechterkant convergeren.

---

(9) De DV scheiden en integreren geeft

$T = T_v + Ce^{kt}$

Vul in $t=0$, $T_0 = +22$, $T_v = -18$, geeft $C = 40$

Vul in $t=8$, $T_8 = +12$ geeft

$T_8 = T_v + Ce^{8k}$ waaruit $k = \frac{1}{8}\log\frac{3}{4}$

Zoek nu t waarvoor geldt

$0 = T_v + Ce^{kt}$, vind $t = \frac{1}{k}\log\frac{18}{40} = \frac{1}{k}\log\frac{9}{20}$

$= 8\dfrac{\log 3/4}{\log 9/20}$, dit kun je verder uitschrijven maar dat heeft niet veel zin.