Wiskundige Technieken 1
Uitwerkingen Hertentamen 2 januari 2014

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met 1 of 2 onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	wel begrepen, maar slordig uitgevoerd, details niet goed in de vingers, of slechte notaties
2pt	grote lijn begrepen maar struikelt in de uitwerking; onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. a. Het uitdrukken van z^3 in rechthoeknotatie is een kwestie van haakjes wegwerken:

$$\begin{aligned} z^3 &= (a+b\mathrm{i})^3 \\ &= a^3 + 3a^2b\mathrm{i} + 3a(b\mathrm{i})^2 + (b\mathrm{i})^3 \\ &= a^3 - 3ab^2 + \left(3a^2b - b^3\right)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Voor $\frac{1}{z}$ is het handig om op een slimme manier met 1 te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a+b\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{a+b\mathrm{i}} \cdot \frac{a-b\mathrm{i}}{a-b\mathrm{i}} \\ &= \frac{a-b\mathrm{i}}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

b. Enerzijds geldt

$$e^{i3x} = \cos 3x + \mathrm{i}\sin 3x.$$

Anderszijds geldt

$$\begin{aligned} e^{i3x} &= \left(e^{ix}\right)^3 \\ &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \left(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x\right)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap het antwoord op het eerste deel van vraag 1a gebruiken (met $a = \cos x$ en $b = \sin x$). Het gelijkstellen van de reële en imaginaire delen geeft de gevraagde uitdrukkingen:

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x, \\ \sin 3x &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x. \end{aligned}$$

2. Aangezien de functie continu is in $x = 1$ geldt $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$. Het invullen van $x = 1$ in $f(x)$ levert de onbepaalde vorm $\left[\frac{0}{0}\right]$ op, dus volgt met de regel van l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{6x^2 + 5} = \frac{0}{11} = 0.$$

We concluderen dat $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

Alternatieve oplossing:
Het punt $x = 1$ is een nulpunt van zowel de teller als de noemer en kunnen we dus wegdelen. We vinden:

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7} = \frac{(x-1)\left(x^2 + x - 2\right)}{(x-1)\left(2x^2 + 2x + 7\right)} = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x + 7},$$

waarbij de laatste uitdrukking alleen maar geldig is voor $x \neq 1$. Omdat we weten dat $f(x)$ continu is in $x = 1$ volgt nu dat

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x\to 1} f(x) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 + 5x - 7} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x + 7} = \frac{0}{11} = 0. \end{aligned}$$

3. Aan de gelijkheid $\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x)$ zien we dat we een Taylorpolynoom voor $\log\frac{1+x}{1-x}$ kunnen vinden door alleen het bekende Taylorpolynoom van $\log(1+x)$ met steunpunt $x = 0$ te gebruiken. Er geldt

$$\log(1+x) \quad = \quad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

en door overal x door $-x$ te vervangen vinden we ook direct

$$\log(1-x) \quad = \quad -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots$$

en dus volgt

$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x) - \log(1-x) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \cdots\right) \\ &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Aangezien we $\log 2$ willen benaderen, kiezen we $x = \frac{1}{3}$ (want $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$) en vinden we:

$$\log 2 \quad \approx \quad 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad = \quad \frac{2}{3} + \frac{2}{81} \quad = \quad \frac{56}{81}.$$

4. Dit volgt direct uit de hoofdstelling der infinitesimaalrekening (stelling 5.5.5 in het boek):

$$f'(x) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Opmerking:
Wie niet precies de uitspraak van de hoofdstelling der infinitesimaalrekening kent, kan het antwoord als volgt vinden. Noem $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$ en noem $G(t)$ een primitieve van $g(t)$ ($g(t)$ is continu en dus integreerbaar, dus $G(t)$ bestaat). Er geldt

$$f(x) \quad = \quad \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad G(x) - G(0).$$

Aangezien we de afgeleide van f willen weten, differentiëren we dit geheel naar x:

$$f'(x) \quad = \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[G(x) - G(0)\right] \quad = \quad G'(x) \quad = \quad g(x) \quad = \quad e^{-x^2/2},$$

waarbij we gebruiken dat $G(0)$ een constante is.

5. a. Gebruik het feit dat $\cos^3 x = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right)$. De integraal lossen we vervolgens op met de substitutie $u = \sin x$ ($\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x &= \int \left(\sin^3 x - \sin^5 x\right)\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int u^3 - u^5\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6 + C \\ &= \frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C.\end{aligned}$$

b. Gebruik de substitutie $u = \log(1+x^2)$ ($\mathrm{d}u = \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned}\int \frac{x\log(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}u^2 + C \quad = \quad \frac{1}{4}\log^2\left(1+x^2\right) + C.\end{aligned}$$

c. We gebruiken partiële integratie. De arctangens kunnen we niet makkelijk integreren, maar wel differentiëren, dus kiezen we $U = \arctan\frac{x}{3}$ en $\mathrm{d}V = x\,\mathrm{d}x$ ($\mathrm{d}U = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{9+x^2}\,\mathrm{d}x$ en $V = \frac{1}{2}x^2$):

$$\begin{aligned}\int x\arctan\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{3}{9+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\int\frac{x^2}{9+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\int 1-\frac{9}{9+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\int\frac{9}{9+x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Bekijk nu de laatste integraal apart. Deze lossen we op met de substitutie $p = \frac{x}{3}$ ($\mathrm{d}p = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned}\int\frac{9}{9+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 3\int\frac{1}{1+p^2}\,\mathrm{d}p = 3\arctan p + C_1 = 3\arctan\frac{x}{3} + C_1.\end{aligned}$$

Tenslotte combineren we de twee deelresultaten en vinden we:

$$\begin{aligned}\int x\arctan\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\int\frac{9}{9+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\left(3\arctan\frac{x}{3} + C_1\right)\\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}\arctan\frac{x}{3} + \frac{3}{2}C_1\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+9\right)\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}x + C,\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = \frac{3}{2}C_1$ kiezen.

6. a. Noem $f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x^4}}$, dan volgt:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+\mathrm{e}^{-(-x)^4}} = -\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x^4}} = -f(x),$$

wat betekent dat de functie die we integreren oneven is. Daarnaast is het interval waarover we integreren symmetrisch rond $x = 0$ en dus concluderen we dat

$$\int_{-a}^{a}\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x^4}}\,\mathrm{d}x = 0,$$

voor alle $a > 0$.

b. We gebruiken de notatie van de oplossing van vraag 6a.
Omdat $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (de noemer convergeert naar 1, de teller divergeert naar oneindig), bestaat de integraal $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ niet en dus bestaat de gevraagde integraal ook niet.

Alternatieve oplossing:
Op het interval $[0,\infty)$ geldt $1+\mathrm{e}^{-x^4} \leq 2$. Dit volgt uit het feit dat de afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+\mathrm{e}^{-x^4}\right) = -4x^3\mathrm{e}^{-x^4}$$

nergens positief is op $[0,\infty)$, dus is $1+\mathrm{e}^{-x^4}$ niet-stijgend op $[0,\infty)$ en dus bereikt $1+\mathrm{e}^{-x^4}$ het maximum op dit interval in het punt $x = 0$. Uit deze ongelijkheid volgt ook dat op het interval $[0,\infty)$ de ongelijkheid $\frac{x}{2} \leq \frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x^4}}$ geldt. Hieruit volgt

$$\int_0^\infty\frac{x}{1+\mathrm{e}^{-x^4}} \geq \frac{1}{2}\int_0^\infty x\,\mathrm{d}x = \infty$$

en dus bestaat de gevraagde integraal niet.

7. a. Allereerst bepalen we de snijpunten met de y-as. Op de y-as geldt $x = 0$, dus volgt $y^2 = (1+0)^2(1-0) = 1$, ofwel $y = \pm 1$. Er zijn dus twee snijpunten met de y-as. Vervolgens bepalen we de afgeleide met behulp van impliciet differentiëren:

$$\begin{aligned} y^2 &= (1+x)^2(1-x) = -x^3 - x^2 + x + 1 \\ 2yy' &= -3x^2 - 2x + 1 \\ y' &= \frac{-3x^2 - 2x + 1}{2y}. \end{aligned}$$

Tenslotte vullen we de coördinaten van de snijpunten in. De helling in het punt $(0,1)$ is $\frac{1}{2}$ en in het punt $(0,-1)$ is de helling precies $-\frac{1}{2}$.

b. Aan de vergelijking $y^2 = (1+x)^2(1-x)$ zien we dat de kromme symmetrisch is in y en dus is de lus ingesloten door deze kromme ook symmetrisch in y. Dit betekent dat het voldoende is om de oppervlakte van dat deel van lus te berekenen dat zich boven de x-as bevindt en dit vervolgens te vermenigvuldigen met 2. Hiertoe moeten we weten waar de kromme de x-as snijdt. De vergelijking $0 = (1+x)^2(1-x)$ heeft de oplossingen $x = \pm 1$ en omdat we kijken naar dat deel van het (x, y)-vlak waar $y \geq 0$ geldt, kunnen we de vergelijking van de kromme daar herscrijven als $y = (1+x)\sqrt{1-x}$. De oppervlakte van de lus is dus

$$2\int_{-1}^{1} (1+x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Deze bepalen we met de (inverse) substitutie $u = \sqrt{1-x}$ (ofwel $x = 1 - u^2$, $\mathrm{d}x = -2u\,\mathrm{d}u$):

$$\begin{aligned} 2\int_{-1}^{1} (1+x)\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\sqrt{2}}^{0} (2-u^2)\cdot u \cdot -2u\,\mathrm{d}u \\ &= 4\int_{0}^{\sqrt{2}} 2u^2 - u^4\,\mathrm{d}u \\ &= 4\left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right]_0^{\sqrt{2}} = 4\left(\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{5}\cdot 4\sqrt{2}\right) = \frac{32}{15}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

8. Vervang y' door $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en gebruik scheiding van variabelen:

$$\begin{aligned} y + 2xy' &= xy, \\ 2xy' &= (x-1)y, \\ 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (x-1)y, \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{x-1}{2x}\,\mathrm{d}x, \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{x-1}{2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x, \\ \log y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log x + C_1, \\ y &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log x + C_1} = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x - \log x)}, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = \mathrm{e}^{C_1}$ kiezen.

9. Het domein van f bestaat uit alle punten waarvoor $2x^2 - x \neq 0$. De punten die dus niet tot het domein behoren berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned} 2x^2 - x &= 0, \\ x(2x-1) &= 0, \\ x = 0 \quad &\text{of} \quad 2x - 1 = 0 \\ & \qquad x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Het domein is dus alles behalve $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}$ (andere mogelijke notaties zijn: $\mathbb{R}\backslash\{0, \frac{1}{2}\}$ en $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$).

Het bereik van f is $(0, \infty)$ (f is immers een exponentiële functie); in het bijzonder zijn er dus geen snijpunten met de x-as. Er is ook geen snijpunt met de y-as, omdat $x = 0$ niet in het domein van f ligt.

Vervolgens gaan we op zoek naar eventuele asymptoten. Omdat $\lim_{x\to\pm\infty} 2x^2 - x = \infty$, volgt dat $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x^2 - x} = 0$ en dus $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$; $y = 1$ is dus een horizontale asymptoot.
Voor eventuele verticale asymptoten kan het handig zijn om de noemer te herschrijven door middel van kwadraatafsplitsen: $2x^2 - x = 2\left((x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}\right)$. We zien dat de noemer, en daarmee dus de hele exponent, negatief is op $(0, \frac{1}{2})$ en positief daarbuiten. Het gevolg hiervan is dat

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{2x^2 - x} &= \lim_{x\downarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x^2 - x} = \infty, \\ \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{2x^2 - x} &= \lim_{x\uparrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x^2 - x} = -\infty\end{aligned}$$

en dus

$$\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty, \quad \text{en} \quad \lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} f(x) = 0.$$

Er zijn dus ook twee verticale asymptoten, namelijk $x = 0$ en $x = \frac{1}{2}$.

Vervolgens bekijken we de afgeleide. De afgeleide is

$$f'(x) = \mathrm{e}^{1/(2x^2 - x)} \cdot -(2x^2 - x)^{-2} \cdot (4x - 1) = \frac{1 - 4x}{(2x^2 - x)^2} \mathrm{e}^{1/(2x^2 - x)}.$$

Deze heeft slechts één nulpunt, namelijk $x = \frac{1}{4}$ (de oplossing van $1 - 4x = 0$), dus is $x = \frac{1}{4}$ ofwel een minimum of een maximum van f. Omdat we al weten dat op het interval $(0, \frac{1}{2})$ geldt $f(x) \to 0$ als $x \downarrow 0$ en $x \uparrow \frac{1}{2}$ en omdat f continu is op $(0, \frac{1}{2})$ moet het wel om een maximum gaan. De waarde van dit maximum is $f(\frac{1}{4}) = e^{-8} < 1$; de grafiek snijdt dus niet de horizontale asymptoot.
Het teken van $f'(x)$ wordt bepaald door de factor $1 - 4x$ in de teller (de overige factoren zijn altijd positief). Op $(-\infty, \frac{1}{4})$ is deze positief en op $(\frac{1}{4}, \infty)$ is deze negatief, wat betekent dat de grafiek van f stijgend is voor $x < \frac{1}{4}$ en dalend voor $x > \frac{1}{4}$.
Tenslotte moeten we nagaan hoe de grafiek van f de punten $(0, 0)$ en $(\frac{1}{2}, 0)$ benadert. Aangezien

$$\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{1 - 4x}{(2x^2 - x)^2} \mathrm{e}^{1/(2x^2 - x)} = \lim_{x\downarrow 0} \mathrm{e}^{1/(2x^2 - x)} = 0,$$

volgt dat de grafiek vrijwel horizontaal loopt voor $x \downarrow 0$. Precies hetzelfde geldt voor $x \uparrow \frac{1}{2}$ (de exponentiële functie wint immers).

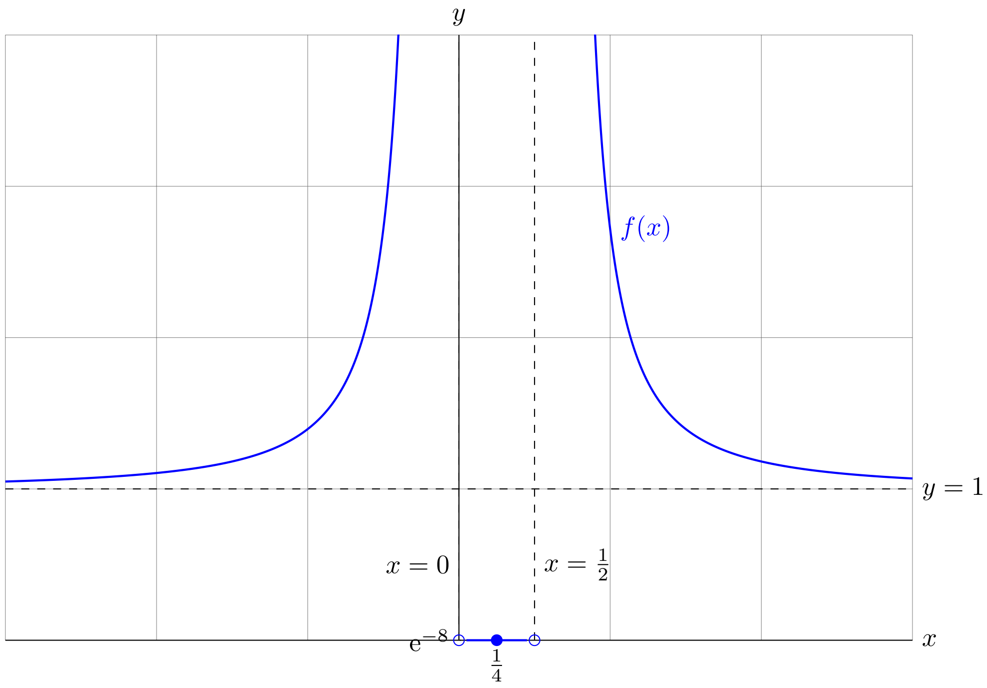
Onderzoek naar buigpunten mogen we overslaan en zullen we hier dan ook niet doen.

We verwerken dit alles in onderstaand tekenschema:

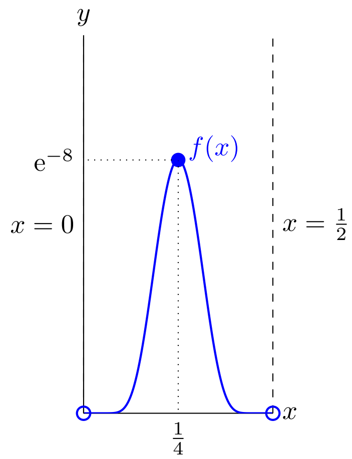
x		0	0		1/4		1/2	1/2	
$f(x)$	$+$	$+$	0	$+$	e^{-8}	$+$	0	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
		asymp.	asymp.				asymp.	asymp.	

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$.

De grafiek ziet er als volgt uit:



Voor iedereen die de schets op het gebied $0 < x < \frac{1}{2}$ niet voldoende vindt, is er ook nog de volgende vergrootte variant:



Opmerking:
Hoewel f niet even of oneven is, bevat de grafiek van f wel degelijk symmetrie. Deze symmetrie wordt duidelijk zichtbaar met behulp van kwadraatafsplitsen:

$$f(x) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2x^2-x}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2\left((x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}\right)}},$$

want uit de laatste schrijfwijze volgt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}-x\right) &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2\left((\frac{1}{4}-x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}\right)}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2\left((-x)^2-\frac{1}{16}\right)}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2\left(x^2-\frac{1}{16}\right)}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2\left((\frac{1}{4}+x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16}\right)}} \\ &= f\left(\frac{1}{4}+x\right), \end{aligned}$$

wat betekent dat de grafiek van f lijnsymmetrisch is in de lijn $x = \frac{1}{4}$.