Wiskundige Technieken 1
Uitwerkingen Hertentamen 23 december 2014

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt	goed begrepen én goed uitgevoerd, eventueel met enkele onbelangrijke rekenfoutjes
3pt	grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort; signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken; maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid); gebruikt verwerpelijke notaties
2pt	weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht; mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.; herkent evident foute tussenresultaten niet; toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie
1pt	aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op
0pt	geen idee wat te doen, dit wordt niks

1. De vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ spannen een parallellogram op. De oppervlakte van dit parallellogram is precies $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. De driehoek OUV is precies de helft van het parallellogram en heeft dus oppervlakte $\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Het uitproduct is

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} \;=\; (-1 \cdot 2 - 0 \cdot 2)\,\mathbf{i} + (0 \cdot 0 - 1 \cdot 2)\,\mathbf{j} + (1 \cdot 2 - -1 \cdot 0)\,\mathbf{k} \;=\; -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

en dus is de oppervlakte van driehoek OUV:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} \;=\; \frac{\sqrt{12}}{2} \;=\; \sqrt{3}.$$

2. Voor alle x geldt $-1 \leq \cos x \leq 1$ en voor alle $x > 0$ geldt $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Daarnaast weten we ook dat $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ en $\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{x} = 0$. Omdat bovendien de functies $\frac{-1}{x}$, $\frac{1}{x}$ en $\frac{\cos x}{x}$ allemaal continu zijn op $[0, \infty)$, volgt uit de insluitstelling dat $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

3. a. We berekenen de afgeleide van de functie $f(x)$:

$$f'(x) \;=\; \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{(x+1) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x+1)^2} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}}{(x+1)^2}.$$

Zowel de teller als de noemer zijn positief voor alle $x \geq 0$ en dus volgt dat $f'(x) > 0$ op $[0, \infty)$. We concluderen dat f strikt stijgend is en dus inverteerbaar op zijn domein.

Alternatieve oplossing:
We kunnen ook laten zien dat f inverteerbaar is door aan te tonen dat f één-op-één is. Stel dat a en b twee getallen op het domein van f zijn met de eigenschap $f(a) = f(b)$, dan moeten we laten zien dat dat alleen kan als $a = b$. We lossen op:

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b), \\ \mathrm{e}^{\frac{a}{a+1}} &= \mathrm{e}^{\frac{b}{b+1}}, \\ \frac{a}{a+1} &= \frac{b}{b+1}, \\ 1 - \frac{1}{a+1} &= 1 - \frac{1}{b+1}, \\ \frac{1}{a+1} &= \frac{1}{b+1}, \\ a+1 &= b+1, \\ a &= b. \end{aligned}$$

Omdat er geen andere oplossingen zijn concluderen we dat f één-op-één is en dus is f inverteerbaar.

b. Eerst bepalen we de inverse van f:

$$\begin{aligned}
x &= \mathrm{e}^{\frac{y}{y+1}}, \\
\log x &= \frac{y}{y+1}, \\
\log x &= 1 - \frac{1}{y+1}, \\
\frac{1}{y+1} &= 1 - \log x, \\
y+1 &= \frac{1}{1-\log x}, \\
y &= \frac{1}{1-\log x} - 1 \;=\; \frac{\log x}{1-\log x}.
\end{aligned}$$

We concluderen dat $f^{-1}(x) = \frac{\log x}{1-\log x}$. Vervolgens moeten we het domein van de inverse bepalen. Het domein van f^{-1} is uiteraard het bereik van f. In onderdeel a hebben we gezien dat de functie f strikt stijgend is, dus is het minimum van f op zijn domein $f(0) = 1$. Verder geldt

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}} = \mathrm{e}$$

en omdat we weten dat f strikt stijgend is volgt nu dat het bereik van f precies $[1, \mathrm{e})$ is. We concluderen dat het domein van f^{-1} precies $[1, \mathrm{e})$ is.

4. a. We herschrijven de gegeven uitdrukking een klein beetje:

$$\frac{z^2 - z + 1}{2z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} - 1\right).$$

De getallen $\frac{1}{2}$ en -1 zijn reëel, dus moeten we alleen nog aantonen dat $z + \frac{1}{z}$ ook reëel is. Omdat we weten dat $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, volgt dat $|z| = 1$, en dus volgt met creatief niets doen:

$$z + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{z}\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = z + \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z + \overline{z}.$$

Omdat de som van een complex getal en zijn geconjugeerde altijd een reëel getal oplevert, concluderen we dat $z + \frac{1}{z}$ inderdaad reëel is.

Alternatieve oplossing 1:
Substitueer $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ in de gegeven uitdrukking en voer de deling uit:

$$\frac{z^2 - z + 1}{2z} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 1}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} - \frac{1}{2}.$$

De eerste term is:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} &= \frac{\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) + \cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x)}{2} \\
&= \frac{2\cos x}{2} = \cos x,
\end{aligned}$$

dus volgt dat $\frac{z^2-z+1}{2z} = \cos(x) - \frac{1}{2}$. We concluderen dat $\frac{z^2-z+1}{2z}$ inderdaad altijd reëel is voor $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

Alternatieve oplossing 2:
Substitueer $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$ in de gegeven uitdrukking:

$$\begin{aligned}
\frac{z^2 - z + 1}{2z} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2x)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 1}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} \\
&= \frac{\cos(2x) + \sin(2x)\mathrm{i} - (\cos(x) + \sin(x)\mathrm{i}) + 1}{2\,(\cos(x) + \sin(x)\mathrm{i})} \\
&= \frac{(\cos(2x) - \cos(x) + 1) + (\sin(2x) - \sin(x))\,\mathrm{i}}{2\,(\cos(x) + \sin(x)\mathrm{i})} \\
&= \frac{((\cos(2x) - \cos(x) + 1) + (\sin(2x) - \sin(x))\,\mathrm{i})\,(\cos(x) - \sin(x)\mathrm{i})}{2\,(\cos(x) + \sin(x)\mathrm{i})\,(\cos(x) - \sin(x)\mathrm{i})} \\
&= \frac{1}{2}\,((\cos(2x) - \cos(x) + 1) + (\sin(2x) - \sin(x))\,\mathrm{i})\,(\cos(x) - \sin(x)\mathrm{i})\,.
\end{aligned}$$

We kunnen nu de haakjes wegwerken en alles zoveel mogelijk herleiden. Omdat we alleen maar hoeven te laten zien dat dit een reëel getal oplevert, is het voldoende om alleen de termen met een factor i te bekijken. De factor $\frac{1}{2}$ kunnen we dus buiten beschouwing laten. De termen die een factor i bevatten na het haakjes wegwerken zijn:

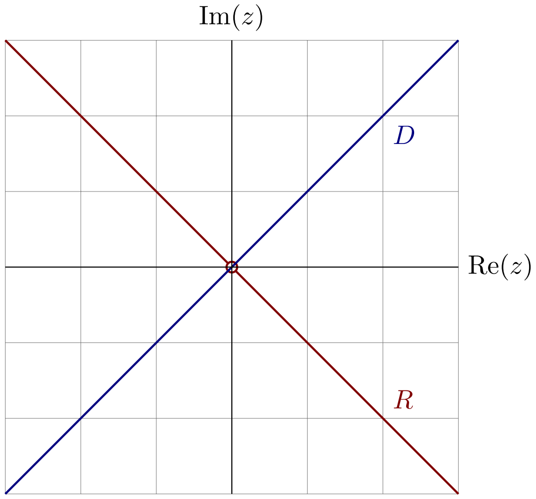
$$\begin{aligned} -\left(\cos(2x)-\cos(x)+1\right)\sin(x)\mathrm{i}+\cos(x)\left(\sin(2x)-\sin(x)\right)\mathrm{i} &= \\ \left(\sin(2x)\cos(x)-\cos(2x)\sin(x)+\sin(x)\right)\mathrm{i} &= \\ \left(\sin(x)-\sin(x)\right)\mathrm{i} &= 0, \end{aligned}$$

waar we de bekende regel $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ gebruiken. We zien dat alle termen met een factor i wegvallen, dus concluderen we dat het een reëel getal is.

b. De verzameling D bestaat uit alle complexe getallen waarvan de reële en imaginaire delen aan elkaar gelijk zijn. De complexe getallen in verzameling R vinden we door een beetje te herschrijven:

$$w = \frac{1}{x+\mathrm{i}x} = \frac{1}{x+\mathrm{i}x}\cdot\frac{x-\mathrm{i}x}{x-\mathrm{i}x} = \frac{x-\mathrm{i}x}{2x^2} = \frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\mathrm{i}.$$

We zien dat voor elk getal in R het reële deel en het imaginaire deel precies een factor -1 van elkaar verschillen. Bovendien kan het reële deel niet nul zijn, dus kunnen we zeggen dat R de verzameling van complexe getallen $y-\mathrm{i}y$ is, met $y\in\mathbb{R}$ en $y\neq 0$. De verzamelingen zien er als volgt uit:



Alternatieve oplossing:
Deze opgave kan ook met behulp van complexe e-machten. De verzameling D bestaat uit alle getallen van de vorm $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ en $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$ met $r\geq 0$. De verzameling R bestaat uit alle getallen van de vorm

$$\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{en} \quad \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

met $r>0$ ($r=0$ vervalt omdat $\frac{1}{r}$ niet bestaat voor $r=0$).

5. De booglengte is gelijk aan de integraal:

$$\int_0^2 \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

We laten de integratiegrenzen eerst achterwege. Het berekenen van deze integraal vereist meerdere technieken en wat creativiteit. We beginnen met partieel integreren
($U=\sqrt{1+4x^2}$ en $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned} \int\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+4x^2}-\int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+4x^2}}\cdot 8x\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+4x^2}-\int\frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Door creatief nietsdoen vinden we:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+4x^2} - \int \frac{1+4x^2-1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Zowel in het linkerlid als in het rechterlid herkennen we de integraal die we willen berekenen. We kunnen de integraal uitdrukken in termen van andere integralen:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+4x^2} - \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x, \\ 2\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1+4x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x, \\ \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+4x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

De integraal in het rechterlid berekenen we met de substitutieregel ($2x = \tan\theta$, $\mathrm{d}x = \frac{1+\tan^2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \cdot \frac{1+\tan^2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Deze laatste integraal berekenen we met behulp van creatief nietsdoen en de substitutieregel ($w = \sin\theta$, $\mathrm{d}w = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$):

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int \frac{1}{1-w^2}\,\mathrm{d}w \\ &= \int \frac{1}{(1-w)(1+w)}\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Deze integraal bepalen we met behulp van breuksplitsen. Er geldt

$$\frac{1}{(1-w)(1+w)} = \frac{A}{1-w} + \frac{B}{1+w} = \frac{(B-A)w + (A+B)}{(1-w)(1+w)},$$

waaruit het volgende stelsel vergelijkingen volgt:

$$\begin{cases} B - A &= 0, \\ A + B &= 1. \end{cases}$$

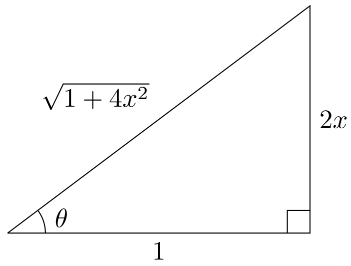
De oplossing van dit stelsel is $A = B = \frac{1}{2}$ en dus volgt

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-w)(1+w)}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-w}\,\mathrm{d}w + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+w}\,\mathrm{d}w \\ &= -\frac{1}{2}\log(1-w) + \frac{1}{2}\log(1+w) \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right),\end{aligned}$$

waarbij we de integratieconstante achterwege laten omdat die geen invloed heeft op de booglengte. We kunnen nu concluderen dat

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+4x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right)\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+\sin(\arctan 2x)}{1-\sin(\arctan 2x)}\right)
\end{aligned}$$

De term $\sin(\arctan 2x)$ vereenvoudigen we met behulp van onderstaande figuur:



waaruit volgt dat $\sin(\arctan 2x) = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$. Dus volgt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+\sin(\arctan 2x)}{1-\sin(\arctan 2x)}\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{1+\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}}{1-\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}}\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{\sqrt{1+4x^2}+2x}{\sqrt{1+4x^2}-2x}\right),
\end{aligned}$$

en dus is de booglengte:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{\sqrt{1+4x^2}+2x}{\sqrt{1+4x^2}-2x}\right)\right]_0^2 \\
&= \sqrt{17} + \frac{1}{8}\log\left(\frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right).
\end{aligned}$$

6. a. De integraal berekenen we met behulp van de substitutie $x = u^2$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+u^2}{1+u}\cdot 2u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int \frac{u^3+u}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int u^2 - u + 2 - \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}u^3 - u^2 + 4u - 4\log|u+1| + C \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2} - x + 4\sqrt{x} - 4\log\left|1+\sqrt{x}\right| + C.
\end{aligned}$$

b. Deze integraal berekenen we met behulp van herhaald partieel integreren. De eerste keer partieel integreren geeft ($U = \log^2 x$ en $\mathrm{d}V = x^3\,\mathrm{d}x$, dus $\mathrm{d}U = \frac{2\log x}{x}\,\mathrm{d}x$ en $V = \frac{x^4}{4}$):

$$\int x^3 \log^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{2}\int x^3\log x\,\mathrm{d}x.$$

De integraal in het rechterlid berekenen we nu door nog een keer partieel integreren toe te passen (nu met $U = \log x$ en $\mathrm{d}V = x^3\,\mathrm{d}x$, dus $\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ en $V = \frac{x^4}{4}$):

$$\begin{aligned}\int x^3 \log x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{4}\int x^3\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4 + C_1,\end{aligned}$$

waarbij C_1 een integratieconstante is. De gevraagde integraal is dus:

$$\begin{aligned}\int x^3\log^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{2}\int x^3\log x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\log x - \frac{1}{16}x^4 + C_1\right)\\ &= \frac{1}{4}x^4\log^2 x - \frac{1}{8}x^4\log x + \frac{1}{32}x^4 + C,\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = -\frac{1}{2}C_1$ kiezen.

c. Deze integraal berekenen we met de substitutie $x = \sqrt{2}\sin\theta$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sin^2\theta}{\sqrt{2}\cos\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int 2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int 1-\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + C\\ &= \theta - \sin\theta\cos\theta + C.\end{aligned}$$

Nu moeten we alles in termen van x uitdrukken. De enige term die lastig kan zijn is $\cos\theta$, maar we hebben in de integrand al gebruikt dat $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cos\theta$, dus volgt dat $\cos\theta = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}$ en dus:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \theta - \sin\theta\cos\theta + C\\ &= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}} + C\\ &= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{x\sqrt{2-x^2}}{2} + C.\end{aligned}$$

7. De helling $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ van $\mathcal{C}$ in termen van t is:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\sin t}{1+\tan^2 t}.$$

Voor $t = \frac{\pi}{4}$ is de afgeleide gelijk aan: $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+1} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Omdat bij $t = \frac{\pi}{4}$ het punt $\left(1, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ hoort, volgt dat een vergelijking van de raaklijn gegeven wordt door:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(x-1)\,.$$

Alternatieve oplossing:
Het is ook mogelijk om de parameter t te elimineren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2 t} &= 1+\tan^2 t,\\ \frac{1}{y^2} &= 1+x^2,\\ y^2 &= \frac{1}{1+x^2},\\ y &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Omdat bij $t = \frac{\pi}{4}$ het punt $\left(1, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ hoort, hebben we alleen de positieve tak nodig. De kromme $\mathcal{C}$ heeft dus de vergelijking $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. De afgeleide is

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

en voor $x = 1$ is dit gelijk aan $-\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$. Een vergelijking van de raaklijn is dus:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\,(x-1)\,.$$

8. a. We laten de beginwaarde voorlopig buiten beschouwing. Eerst lossen we de homogene vergelijking $x^2y' + y = 0$ op:

$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y &= 0 \\ x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y \\ -\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ -\int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ -\log y &= -\frac{1}{x} + C_1 \\ \log y &= \frac{1}{x} - C_1 \\ y &= C\mathrm{e}^{1/x}, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap $C = \mathrm{e}^{-C_1}$ kiezen. Nu lossen we de inhomogene vergelijking op met variatie van constanten. Stel $y = C(x)\mathrm{e}^{1/x}$ en substitueer in de inhomogene vergelijking:

$$\begin{aligned} x^2y' + y &= x^2\mathrm{e}^{1/x} \\ x^2\left(C'(x)\mathrm{e}^{1/x} + C(x)\mathrm{e}^{1/x}\cdot -\frac{1}{x^2}\right) + C(x)\mathrm{e}^{1/x} &= x^2\mathrm{e}^{1/x} \\ C'(x)x^2\mathrm{e}^{1/x} &= x^2\mathrm{e}^{1/x} \\ x^2\mathrm{e}^{1/x} = 0 \quad \text{of} \quad C'(x) &= 1. \end{aligned}$$

De eerste vergelijking heeft geen oplossingen (0 zit niet in het domein van $y = C(x)\mathrm{e}^{1/x}$). De tweede vergelijking heeft als oplossing $C(x) = x + K$, waarbij K een constante is. De oplossing van de inhomogene vergelijking is $y = (x+K)\mathrm{e}^{1/x}$. Uit het invullen van de beginwaarde $y(1) = 3\mathrm{e}$ in de gevonden oplossing volgt dat $K = 2$ en dus is de oplossing van het beginwaardeprobleem $y = (x+2)\mathrm{e}^{1/x}$.

b. De bijbehorende karakteristieke vergelijking is $r^2 - 4r + 5 = 0$, waarvan de oplossingen $r = 2 \pm i$ zijn. De algemene oplossing van de gegeven differentiaalvergelijking is dus $y = A\mathrm{e}^{2x}\cos x + B\mathrm{e}^{2x}\sin x$.

9. Allereerst gaan we op zoek naar het domein van de functie $f(x)$. Het domein van de functie bestaat uit alle x waarvoor $x - \frac{1}{x} > 0$ geldt:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{x} &> 0 \\ \frac{x^2-1}{x} &> 0 \end{aligned}$$
$$x^2 - 1 > 0 \text{ én } x > 0, \quad \text{of} \quad x^2 - 1 < 0 \text{ én } x < 0.$$

De oplossing van het eerste stelsel ongelijkheden is $x > 1$: de oplossing van $x^2 - 1 > 0$ is $x < -1$ of $x > 1$ en omdat x positief moet zijn vervallen alle negatieve oplossingen. Op dezelfde manier is de oplossing van het tweede stelsel ongelijkheden $-1 < x < 0$: de oplossing van $x^2 - 1 < 0$ is $-1 < x < 1$ en omdat x nu negatief moet zijn vervallen alle niet-negatieve oplossingen. De oplossingen van beide stelsels ongelijkheden vormen samen het domein van de functie f. Het domein van $f(x)$ is dus $(-1,0)\cup(1,\infty)$.

Vervolgens gaan we op zoek naar snijpunten met de coördinaatassen. Er zijn geen snijpunten met de y-as (want 0 zit niet in het domein van f), dus zoeken we naar snijpunten met de x-as. We lossen $f(x) = 0$ op:

$$\begin{aligned}
\log\left(x - \frac{1}{x}\right) &= 0 \\
x - \frac{1}{x} &= 1 \\
x^2 - 1 &= x \\
x^2 - x - 1 &= 0 \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{5}{4} \\
x - \frac{1}{2} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{5} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Beide oplossingen zitten in het domein van f en voldoen dus.

Nu gaan we op zoek naar eventuele asymptoten. Hiervoor kan het handig zijn om de functie te herschrijven: $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$. Als x van boven naar -1 nadert, dan gaat $\frac{x^2-1}{x}$ van boven naar 0, dus volgt:

$$\lim_{x \downarrow -1} f(x) = \lim_{u \downarrow 0} \log u = -\infty.$$

Er is dus een verticale asymptoot bij $x = -1$. Op dezelfde manier zien we dat:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \uparrow 0} f(x) &= \lim_{u \to \infty} \log u = \infty, \\
\lim_{x \downarrow 1} f(x) &= \lim_{u \downarrow 0} \log u = -\infty,
\end{aligned}$$

wat betekent dat er ook verticale asymptoten bij $x = 0$ en $x = 1$ zijn. Daarnaast geldt

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

wat betekent dat er geen horizontale asymptoten zijn.

De afgeleide is

$$f'(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}.$$

Omdat de teller nooit nul kan worden, heeft f geen kritieke punten. Iets preciezer, op het domein van f geldt $f'(x) > 0$, wat betekent dat f strikt stijgend is (dit klopt met alles wat we tot nu toe hebben gevonden).

De tweede afgeleide is

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x^3 - x) \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} \\
&= \frac{2x^4 - 2x^2 - \left(3x^4 + 3x^2 - x^2 - 1\right)}{(x^3 - x)^2} \\
&= \frac{-x^4 - 4x^2 + 1}{(x^3 - x)^2}.
\end{aligned}$$

We lossen $f''(x) = 0$ op (met de substitutie $p = x^2$):

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
-x^4 - 4x^2 + 1 &= 0 \\
x^4 + 4x^2 - 1 &= 0 \\
p^2 + 4p - 1 &= 0 \\
(p + 2)^2 - 5 &= 0 \\
p &= -2 \pm \sqrt{5}
\end{aligned}$$

$$x^2 = -2 - \sqrt{5} \quad \text{of} \quad x^2 = -2 + \sqrt{5}.$$

De eerste vergelijking heeft geen oplossingen. De tweede vergelijking heeft de oplossingen:

$$x \;=\; \sqrt{-2+\sqrt{5}} \quad \text{of} \quad x \;=\; -\sqrt{-2+\sqrt{5}}.$$

Hoewel beide oplossingen bestaan, voldoet alleen de tweede oplossing (de eerste oplossing ligt niet in het domein van f, omdat $-2+\sqrt{5} < 1$). Er is dus één buigpunt.

We vatten het geheel als volgt samen:

x	-1		$(1-\sqrt{5})/2$		$-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$		0	1		$(1+\sqrt{5})/2$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$			$-$	0	$+$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$			$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$			$+$	$+$	$+$

Verticale asymptoten: $x = -1$, $x = 0$ en $x = 1$.

De grafiek ziet er als volgt uit: