Hertentamen WISN101 Wiskundige Technieken 1

Di 22 dec 2015

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd, eventueel met enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks.

1. a. Laat zien dat $\mathrm{i}(\bar{z} - z) = 2\,\mathrm{Im}(z)$, voor z in $\mathbb{C}$. 4 pt.

   Als $z = x + \mathrm{i}y$ dan $\operatorname{Im} z = y$ en bovendien $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$ zodat $\mathrm{i}(\bar{z} - z) = \mathrm{i}(-2\mathrm{i}y) = +2y = 2\operatorname{Im} z$.

   b. Vind alle z in $\mathbb{C}$ waarvoor geldt $z^3 = \mathrm{i} - 1$. 4 pt.

   Schrijf met modulus-argument notatie $z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}$ met $\varphi = \arg z$ zodat $z^3 = |z|^3 e^{3\mathrm{i}\varphi}$. Schrijf evenzo $\mathrm{i} - 1 = \sqrt{2}e^{3\pi\mathrm{i}/4}$. Er moet nu gelden $|z|^3 = \sqrt{2}$ en $3\varphi = (\frac{3}{4} + 2k)\pi$ met $k \in \{0, 1, 2\}$ (vanwege de periodiciteit van de complexe e-macht; voor andere waarden van k herhalen de argumenten zich). Dus $|z| = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ en $\varphi = (\frac{1}{4} + \frac{2}{3}k)\pi$ met $k = 0, 1, 2$. Conclusie: $z = \sqrt[6]{2}e^{\frac{1}{4}\pi\mathrm{i}}$, $z = \sqrt[6]{2}e^{\frac{11}{12}\pi\mathrm{i}}$, of $z = \sqrt[6]{2}e^{\frac{19}{12}\pi\mathrm{i}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}e^{-\frac{5}{12}\pi\mathrm{i}}$.

   Wie dit in rechthoekvoorstelling probeert loopt gegarandeerd vast op twee vergelijkingen van graad 3. Dat soort ervaringen kun je beter tijdens de voorbereiding opdoen dan tijdens het tentamen.

2. a. Stel het derde-orde Taylorpolynoom van $\tan x$ in het steunpunt 0 op, en geef hiermee een schatting van $\tan \frac{1}{2}$. 4 pt.

De afgeleide van tan heeft verschillende gedaanten. We kiezen hier voor de vorm $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ omdat daarmee herhaald differentiëren het makkelijkste gaat:

$$\tan'' x = 2\tan x \tan' x = 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2\tan x + 2\tan^3 x,$$
$$\tan''' x = 2\tan' x + 6\tan^2 x \tan' x = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x.$$

Hiermee vinden we $\tan 0 = 0$, $\tan' 0 = 1$, $\tan'' 0 = 0$ en $\tan''' 0 = 2$. Het derde orde Taylorpolynoom is dus

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\tan^{(k)} 0}{k!} x^k = x + \tfrac{1}{3}x^3.$$

Uitrekenen voor $x = \frac{1}{2}$ geeft $T_3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ als benadering voor $\tan \frac{1}{2}$. *Velen kiezen voor* $1/\cos^2 x$ *als afgeleide van* $\tan x$ *en dat gaat ook goed, met iets meer werk. Veel voorkomende fouten: (i) orde 3 is 3 termen (goed is: t/m derde afgeleide dus 4 termen) en (ii)* $\frac{1}{2}$ *invullen als steunpunt. Beide fouten wijzen op slechte voorbereiding.*

b. Kan de grafiek van $y = \mathrm{e}^{x^2+ax}$ precies één buigpunt hebben? Zo ja, voor welke waarde(n) van a? 4 pt.

Een noodzakelijke voorwaarde voor een buigpunt is dat de tweede afgeleide 0 is, dus er is hoogstens één buigpunt indien $y'' = 0$ precies één oplossing heeft. Differentiëer en vind $y' = (2x + a)y$ en $y'' = (2 + (2x + a)^2)y$. Merk op dat $y \neq 0$ voor alle x, zodat $y'' = 0$ als $2 + (2x + a)^2 = 0$. Maar $2 > 0$ en $(2x + a)^2 \geq 0$, dus deze vergelijking heeft geen oplossingen. Concludeer dat deze grafiek voor geen enkele waarde van a een buigpunt heeft.

Ik zag hier veel gestuntel bij het differentiëren en ook veel onnodig werk en tijdverlies door niet herkennen dat $(2x + a)^2 \geq 0$.

3. Onderzoek de functie $f(x) = \dfrac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}$ en schets de grafiek. 8 pt.

- Domein: zowel teller als noemer vereisen $1 - x > 0$ dus het domein is $(-\infty, 1)$.
- Snijden met de assen: $f(0) = \log 1 = 0$; dit is gelijk de enige oplossing van $f(x) = 0$.

- Randen:
$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{u\to 0+} f(1-u) = \lim_{u\to 0+} \frac{\log u}{\sqrt{u}} = -\infty$ (want $-\infty/0^+$).
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{\log u}{\sqrt{u}} = 0^+$ (standaardlim).

- Afgeleide:

$$f'(x) = \frac{-1/\sqrt{1-x} + \log(1-x)/2\sqrt{1-x}}{1-x} = \frac{\frac{1}{2}\log(1-x) - 1}{(1-x)^{3/2}}.$$

We hebben $f'(x) = 0$ indien $\log(1-x) = 2$, dus als $x = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6$. Aangezien f' hier van teken wisselt treedt er een extreem op. De functiewaarde hier is $f(1-\mathrm{e}^2) = \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0{,}7$. Verder is prettig om te weten dat $f'(0) = -1$.

- Tweede afgeleide: merk op dat $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-1}f(x) - (1-x)^{-3/2}$. Nogmaals differentiëren geeft dan

$$\begin{aligned} f''(x) &= \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2}f(x) + \tfrac{1}{2}(1-x)^{-1}f'(x) - \tfrac{3}{2}(1-x)^{-5/2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\log(1-x)}{(1-x)^{5/2}} + \frac{\frac{1}{4}\log(1-x) - \frac{1}{2}}{(1-x)^{5/2}} - \frac{\frac{3}{2}}{(1-x)^{5/2}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}\log(1-x) - 2}{(1-x)^{5/2}}. \end{aligned}$$

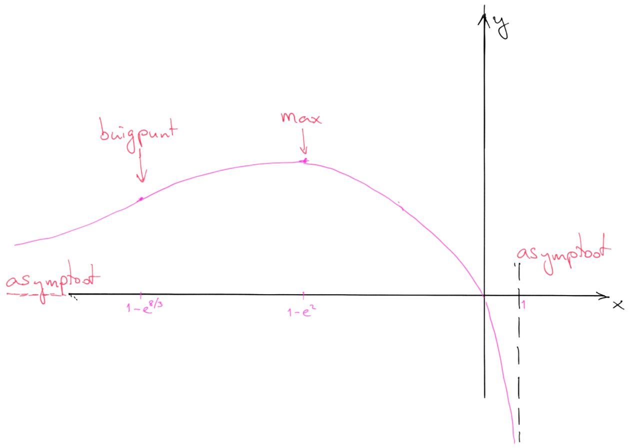
Opm.: ik dacht eerst dat dit een handige aanpak was maar achteraf blijkt het eigenlijk niet handiger te zijn dan rechtstreeks met de quotiëntregel.

We hebben $f''(x) = 0$ indien $\log(1-x) = \frac{8}{3}$, dat is $x = 1 - \mathrm{e}^{8/3} \approx -13$. (Die laatste benadering heb je waarschijnlijk niet paraat, maar je weet wel dit: aangezien $\frac{8}{3} > 2$ ligt $1 - \mathrm{e}^{8/3}$ links van $1 - \mathrm{e}^2$ op de x-as.) Omdat f'' hier van teken wisselt treedt er een buigpunt op. De functiewaarde is hier $f(1-\mathrm{e}^{8/3}) = \frac{8}{3}\mathrm{e}^{-4/3} \approx 0{,}7$ en de helling $f'(1-\mathrm{e}^{8/3}) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4} \approx 0^+$.

- Tekenschema:

x	$-\infty$		$1-\mathrm{e}^{8/3}$		$1-\mathrm{e}^2$		0		1
$f(x)$	0^+	$+$	$\approx 0{,}7$	$+$	$2/e$	$+$	0	$\to -\infty$	$\lightning$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	-1	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	

- Schets (met de y-as flink uitgerekt):



Goed differentiëren (tweemaal) vergt routine en nauwgezet werken. Ook zie je hier duidelijk het belang van vereenvoudigen van tussenresultaten.

4. Evalueer de volgende integralen:

a. $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4x+1)^{10}}$ 4 pt.

Substitueer $u = 4x+1$ met $\mathrm{d}u = 4\mathrm{d}x$ en $x = \frac{1}{4}(u-1)$. Invullen:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4x+1)^{10}} &= \tfrac{1}{64}\int \frac{(u-1)^2\,\mathrm{d}u}{u^{10}} = \tfrac{1}{64}\int \frac{u^2-2u+1\,\mathrm{d}u}{u^{10}} \\ &= \tfrac{1}{64}\int u^{-8} - 2u^{-9} + u^{-10}\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{64}\left(-\tfrac{1}{7}u^{-7} - \tfrac{1}{4}u^{-8} - \tfrac{1}{9}u^{-9}\right) \\ &= -\tfrac{1}{448}u^{-7} - \tfrac{1}{256}u^{-8} - \tfrac{1}{576}u^{-9}.\end{aligned}$$

Terugsubstitueren:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4x+1)^{10}} = -\tfrac{1}{448}(4x+1)^{-7} - \tfrac{1}{256}(4x+1)^{-8} - \tfrac{1}{576}(4x+1)^{-9} + c.$$

Deze kan ook met $2\times$ partiëel integreren, dat is wat meer werk.

b. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4x^4+4x^2+5}$ 4 pt.

Substitueer eerst $u = x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$. In de noemer krijg je dan $4x^4 + 4x^2 + 5 = 4u^2 + 4u + 5 = (2u+1)^2 + 4$. Een nog betere substitutie is dus

$v = \frac{2u+1}{2} = x^2 + \frac{1}{2}$, met $\mathrm{d}v = \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, want dan:

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{4x^4+4x^2+5} = \tfrac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{(2v)^2+4} = \tfrac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1}$$
$$= \tfrac{1}{8}\arctan v = \tfrac{1}{8}\arctan(x^2+\tfrac{1}{2}) + c.$$

5. We definiëren voor $x > 0$ de functie $f(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. Je mag aannemen dat de integraal convergeert voor alle $x > 0$.

   Deze functie staat bekend als de Γ-functie (Gammafunctie) die de faculteiten $n!$ generaliseert tot een functie op de reële getallen, en daarnaast nog vele andere mooie en/of nuttige eigenschappen heeft.

   a. Bereken $f(1)$. 2 pt.

   $f(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}\big|_{t=0}^{\infty} = 1.$

   b. Laat zien dat $f(x+1) = xf(x)$. Hint: partiëel. 4 pt.

   Partiëel integreren geeft

   $$f(x+1) = \int_0^\infty t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -t^x\mathrm{e}^{-t}\Big|_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty xt^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   De eerste term verdwijnt: $\lim_{t\to\infty} t^x\mathrm{e}^{-t} = 0$ en $t^x\mathrm{e}^{-t}\big|_{t=0} = 0$. De tweede term is precies $xf(x)$ (de integraal loopt niet over x, dus die heeft de rol van constante en kan dus naar buiten).

   Opvallend vaak werd de evaluatie van de term $-t^x\mathrm{e}^{-t}$ over het hoofd gezien en werd de hele term vervolgens met listige smoesjes onder het vloerkleed gemoffeld. Wie dat doet herkent dus z'n foute tussenresultaten niet en loopt des te dieper het moeras in.... NB buiten de integraal (en de evaluatie) is t als een vis zonder water, hij fungeert slechts als integratie-variabele, alleen daarom al zouden je alarmbellen af moeten gaan.

   c. Bereken nu ook $f(6)$. 2 pt.

   Met gebruik van respectievelijk b en a:
   $f(6) = 5f(5) = 5\cdot 4f(4) = \cdots = 5!f(1) = 5! = 120.$

6. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 4 pt.

$$\begin{cases} y'' + 4y = \sin t, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

"Probeeroplossing": $a \cos t + b \sin t$.

Dit is een inhomogene lineaire tweede-orde DV met constante coëfficiënten die we aanpakken door eerst de algemene opl van de homogene vgl te zoeken en vervolgens een particuliere oplossing van de inhomogene vgl daarbij op te tellen. Ten slotte bepalen we de integratieconstanten met de beginwaarden.

De homogene vgl $y'' + 4y = 0$ heeft karakteristieke vergelijking $\lambda^2 + 4 = 0$. Deze heeft twee complexe oplossingen $\lambda = \pm 2i$. De homogene oplossing is dus van de vorm $y_H = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$.

Als kandidaat voor de particuliere oplossing beschouwen we $y_P = A \cos t + B \sin t$ voor nader te bepalen A, B. Tweemaal differentiëren geeft $y_P'' = -A \cos t - B \sin t$, zodat $y_P'' + 4y = 3A \cos t + 3B \sin t$: dit is gelijk aan de inhomogene term indien $A = 0$ en $B = \frac{1}{3}$.

De algemene oplossing van de DV is dus

$$y = y_H + y_P = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \tfrac{1}{3} \sin t.$$

Vullen we de randwaarden in dan krijgen we $y(0) = c_1$ dus $c_1 = 3$, en $y'(0) = 2c_2 + \frac{1}{3}$ dus $c_2 = -\frac{1}{6}$. Dus de oplossing van het beginwaardeprobleem is

$$y = 3 \cos 2t - \tfrac{1}{6} \sin 2t + \tfrac{1}{3} \sin t.$$

Een standaardopgave die iedereen blindelings hoort te kunnen maken.

7. Vind alle functies $y = y(x)$ die voldoen aan $y = y' + y^2$. 4 pt.

We schrijven $y' = \frac{dy}{dx}$ en scheiden de variabelen x en y:

$$\frac{dy}{y - y^2} = dx.$$

De linkerkant integreren we met breuksplitsen:

$$\int \frac{dy}{y - y^2} = \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\, dy = \log y - \log(1-y) = \log \frac{y}{1-y},$$

mits $0 < y < 1$. De rechterkant is eenvoudig te integreren en daarna hebben we

$$\log \frac{y}{1-y} = x + C \quad \text{oftewel} \quad \frac{y}{1-y} = C\mathrm{e}^x.$$

Nu moeten we nog y uitdrukken als functie van x. Merk op dat $\frac{y}{1-y} = \frac{-1+y}{1-y} + \frac{1}{1-y} = -1 + \frac{1}{1-y}$. Hiermee vinden we eerst dat

$$\frac{1}{1-y} = 1 + C\mathrm{e}^x$$

waaruit dan weer volgt

$$y = 1 - \frac{1}{1 + C\mathrm{e}^x} = \frac{C\mathrm{e}^x}{1 + C\mathrm{e}^x}.$$

Dit is een plusopgave die wat meer creativiteit en inzicht vraagt.