Hertentamen WISN101 Wiskundige Technieken 1

Do 5 jan 2017 13:30–16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Totaal 52 punten.

1. Gegeven zijn de vectoren $\boldsymbol{p} = \hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ en $\boldsymbol{q} = 3\hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}} + \hat{\mathbf{k}}$.

   a. Bereken $\cos\alpha$ waarbij α de hoek tussen $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ is. 3 pt.

   b. Bereken op een efficiënte manier de oppervlakte van het parallellogram dat $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ opspannen. 3 pt.

2. In deze opgave nemen we $v = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\mathrm{i}$.

   a. Vind alle complexe getallen z die voldoen aan $z^2 = v$. Geef antwoord in Cartesische (rechthoeks) vorm. 4 pt.

   We nemen nu de verzameling $\mathcal{B}$ bestaande uit de getallen $z \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $0 \leq |z| \leq 1$ en $-\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq 0$.

   b. Bepaal het beeld van $\mathcal{B}$ onder de afbeelding (complexe functie) $z \mapsto vz$. Geef daarbij ook een duidelijke schets. 4 pt.

3. We bekijken de functie $f(x) = x\log(1/x)$ op een zo groot mogelijk domein en de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met

$$g(x) = \begin{cases} f(|x|) & \text{waar dat mogelijk is,} \\ a & \text{anders.} \end{cases}$$

   a. Kies $a \in \mathbb{R}$ zodanig dat g continu is op heel $\mathbb{R}$. Verklaar je antwoord. 4 pt.

   b. Bepaal $g'(x)$ in alle punten x waar dat mogelijk is. 4 pt.

4. Evalueer de volgende integralen:

   a. $$\int \frac{x^2}{x^6 + 3x^3 + 2}\,\mathrm{d}x,$$ 4 pt.

   b. $$\int \mathrm{e}^{\arcsin x}\,\mathrm{d}x.$$ 4 pt.

5. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 6 pt.

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\alpha\dot{x} + mg, \\
\dot{x}(0) &= 0, \\
x(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

6. We definiëren een familie functies $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als volgt:

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= 1, \text{ constante functie,} \\
u_1(x) &= 2x, \text{ en} \\
u_{n+1}(x) &= 2xu_n(x) - u_{n-1}(x) \text{ als } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

   a. Laat zien dat $u_2(x) = 4x^2 - 1$ en bereken zelf $u_3(x)$. 2 pt.

   b. Men beweert dat voor alle n geldt: 2 pt.

$$u_n(\cos\varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\varphi}.$$

   Laat zien dat deze bewering klopt voor $n = 0$ en $n = 1$.

   c. Neem aan dat u_n en u_{n-1} de genoemde eigenschap hebben. Laat zien dat u_{n+1} hem dan ook heeft. 4 pt.
   Hint: Probeer eerst op klad totdat je ziet hoe het werkt.

7. Onderzoek de functie $f(x) = \log \dfrac{x}{\mathrm{e} - x}$ en schets de grafiek. 8 pt.