Tentamen WISN101 Wiskundige Technieken 1

Ma 7 nov 2016 13:30–16:30

Normering voor 4 pt vragen (andere vragen naar rato):

4pt Goed begrepen en goed uitgevoerd met voldoende toelichting, eventueel enkele onbelangrijke rekenfoutjes.

3pt Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert "onmogelijke" tussenresultaten maar is niet in staat deze weg te werken;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige tekstuitleg maar zeker niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

2pt Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 3pt genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

1pt Aardig beginnetje, maar het levert niet echt wat op.

0pt Geen idee wat te doen, dit wordt niks; of: toelichting bij formules ontbreekt volledig (en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk).

NB: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

1. Gegeven zijn de vectoren $\boldsymbol{u} = \hat{\mathbf{\imath}} - 6\hat{\mathbf{\jmath}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ en $\boldsymbol{v} = 3\hat{\mathbf{\imath}} + 3\hat{\mathbf{\jmath}} + 5\hat{\mathbf{k}}$.

   a. Toon aan dat $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ orthogonaal zijn. 2 pt.

   Het inproduct is $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1 \cdot 3 - 6 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 0$, en inproduct 0 betekent dat $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{v}$ orthogonaal zijn.
   Velen hebben hier iets opgeschreven in de trant van "als orthogonaal dan inprod 0", constateren dat het inprod. 0 is, en trekken dan de conclusie dat DUS de vectoren orthogonaal zijn. Alles klopt, behalve de logica van de conclusie.

   b. Bereken een vector $\boldsymbol{w}$ die loodrecht op $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{v}$ staat en waarvan de eerste coördinaat 13 is. 4 pt.

   We nemen eerst het uitproduct $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -39\hat{\mathbf{\imath}} + 4\hat{\mathbf{\jmath}} + 21\hat{\mathbf{k}}$, want dit is een vector die loodrecht op $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{v}$ staat. Om te zorgen dat de eerste coördinaat

13 is, nemen we het scalair veelvoud van deze vector met $-\frac{1}{3}$, dan vinden we $\boldsymbol{w} = 13\hat{\mathbf{\imath}} - \frac{4}{3}\hat{\mathbf{\jmath}} - 7\hat{\mathbf{k}}$.

2. Beschouw de complexe getallen $v = \dfrac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ en $w = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

   a. Bereken modulus en argument van het product vw. 4 pt.

Je kunt eerst het product nemen van v en w en daarna modulus en argument van het product, maar waarschijnlijk heb je dan grote moeite om het argument te vinden. Daarentegen herken ik in u en v "mooie" punten op de eenheidscirkel: $v = \cos(-\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(-\frac{3}{4}\pi) = \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\pi/4}$ en $w = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$. Het product is dus $vw = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3 - 3\pi/4)} = \mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\pi/12}$, met modulus 1 en argument $-\frac{5}{12}\pi$.

   b. We nemen de verzameling $\mathcal{B}$ bestaande uit de getallen $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ waarvoor geldt 4 pt.

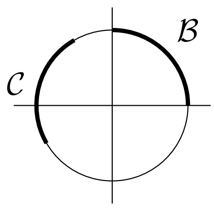
$$x^2 + y^2 = 1, \qquad 0 < x < 1 \quad \text{en} \quad 0 < y < 1.$$

Bepaal het beeld (formules en plaatje) van $\mathcal{B}$ onder de afbeelding (complexe functie) $z \mapsto w^2 z$ met w als boven.

De verzameling $\mathcal{B}$ bestaat uit punten op de eenheidscirkel in het eerste kwadrant (behalve de punten op de assen), d.w.z. punten z met $|z| = 1$ en $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Elk punt $z \in \mathcal{B}$ wordt afgebeeld op $w^2 z$.

Bij (a.) hebben we gezien dat $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, dus $w^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. Aangezien $|w^2| = 1$ en $\arg w^2 = \frac{2}{3}\pi$, komt vermenigvuldigen met w^2 overeen met roteren om 0 over een hoek $\frac{2}{3}\pi = 120°$.

Het beeld van $\mathcal{B}$ (in de figuur aangegeven met $\mathcal{C}$) bestaat dus uit de punten $w^2 z$ met $|w^2 z| = 1$ en $\frac{2}{3}\pi < \arg w^2 z < (\frac{1}{2} + \frac{2}{3})\pi = 1\frac{1}{6}\pi$. (Je kunt het beeld ook in rechthoeksvorm beschrijven maar waarom zou je, als het zo makkelijk kan.)



3. De functie f wordt beschreven als volgt: 4 pt.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{als } x < \frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{e}^{x\cos x} & \text{als } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Bepaal a en b zo dat f differentiëerbaar is op heel $\mathbb{R}$.

> In $x = \frac{\pi}{2}$ is $f(x)$ gedefinieerd als $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^0 = 1$, en de rechter afgeleide daar is $(\cos x - x\sin x)f(x)\big|_{x=\pi/2} = -\frac{\pi}{2}$. De linker afgeleide van f in $x = \frac{\pi}{2}$ is a en deze moet gelijk zijn aan de rechter afgeleide: dus $a = -\frac{\pi}{2}$. Tot slot vinden we b door op te lossen $a \cdot \frac{\pi}{2} + b = f(\frac{\pi}{2})$, dit geeft $b = 1 + \frac{1}{4}\pi^2$.

4. Stel het derde-orde Taylorpolynoom van $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ in het steunpunt 0 op. 4 pt.

> Het derde-orde Taylorpolynoom met steunpunt 0 is
>
> $$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3.$$
>
> In dit geval hebben we achtereenvolgens:
> $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ dus $f(0) = \mathrm{e}$,
> $f'(x) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x f(x)$ dus $f'(0) = 1 \cdot f(0) = \mathrm{e}$,
> $f''(x) = \mathrm{e}^x f(x) + \mathrm{e}^x f'(x) = (1 + \mathrm{e}^x)f'(x)$ dus $f''(0) = 2\mathrm{e}$,
> en ten slotte
> $f'''(x) = \mathrm{e}^x f'(x) + (1 + \mathrm{e}^x)f''(x)$ dus $f'''(0) = 1 \cdot \mathrm{e} + 2 \cdot 2\mathrm{e} = 5\mathrm{e}$.
> Het Taylorpolynoom is dus $\mathrm{e} + \mathrm{e}x + \mathrm{e}x^2 + \frac{5}{6}\mathrm{e}x^3$ of $\mathrm{e}(1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3)$.

5. a. Bereken $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(4+x)\sqrt{x}}$. 4 pt.

> Gebruik de substitutie $u^2 = x$ met $2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$, $u \to 0$ als $x \to 0$, en $u \to \infty$

als $x \to \infty$, dan gaat de bepaalde integraal over in

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{2u\,\mathrm{d}u}{(4+u^2)u} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{4+u^2} \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+(u/2)^2} \\
&= \arctan \tfrac{u}{2}\Big|_0^\infty \\
&= \lim_{u\to\infty} \arctan \tfrac{u}{2} - \arctan 0 = \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Je kunt ook de onbepaalde integraal uitrekenen, terugsubstitueren en daarna de grenzen evalueren:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(4+x)\sqrt{x}} = \arctan \tfrac{1}{2}\sqrt{x}\Big|_0^\infty = \lim_{x\to\infty} \arctan \tfrac{1}{2}\sqrt{x} - \arctan 0 = \tfrac{\pi}{2}.$$

b. Evalueer $\displaystyle\int \frac{4x^2+2x+4}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

Hint: laat zien dat $4x^2+2x+4 = (x-2)(2x+2)+2(x^2+2x+4)$, *en factoriseer de noemer.*

Eerst hint controleren:

$$\begin{aligned}
&(x-2)(2x+2)+2(x^2+2x+4) \\
&= (2x^2-2x-4)+(2x^2+4x+8) \\
&= 4x^2+2x+4,
\end{aligned}$$

dat klopt ja.

De noemer x^3-8 heeft een nulpunt bij $x=2$ en heeft dus een factor $x-2$ vgs. de factorstelling. Uitvoeren van de deling geeft $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$. De tweede factor is gelijk aan $(x+1)^2+3>0$ dus we kunnen niet verder factoriseren. We zien wel beide factoren terug in de hint, dat zal wel de bedoeling zijn. Inderdaad kunnen we nu de integrand als volgt herschrijven:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2+2x+4}{x^3-8} &= \frac{(x-2)(2x+2)+2(x^2+2x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \\
&= \frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x-2}.
\end{aligned}$$

De laatste twee breuken zijn eenvoudig te primitiveren: eerst

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,\mathrm{d}x = \log(x^2+2x+4)+c,$$

hier kan $|\cdot|$ in de log achterwege blijven omdat de veelterm voor alle waarden van x positief is; en vervolgens

$$\int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x = 2\log|x-2|+c.$$

Dus

$$\begin{aligned}&\int \frac{4x^2+2x+4}{x^3-8}\,\mathrm{d}x\\ &= \log(x^2+2x+4)+2\log|x-2|+c\\ &= \log\big((x^2+2x+4)(x-2)^2\big)+c.\end{aligned}$$

(Beide antw goed rekenen.)

6. Zij f een polynoom van graad $2n$. We definiëren de functie g als

$$g(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x)\cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x);$$

de even afgeleides van f worden dus beurtelings afgetrokken en opgeteld.

a. Laat zien dat $g(x) + g''(x) = f(x)$. 2 pt.

Tweemaal diff van g geeft

$$\begin{aligned}g''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \\ \cdots + (-1)^{n-1} f^{(2n)}(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x).\end{aligned}$$

Maar f is een polynoom van graad $2n$, dus $f^{2n}(x)$ is constant en alle hogere afgeleides zijn identiek nul: de laatste term die we hebben opgeschreven bij g'' verdwijnt dus. Nu volgt direct dat $g(x) + g''(x) = f(x)$, immers alle overgebleven afgeleides worden eenmaal opgeteld en eenmaal afgetrokken. *Hier is echt enorm veel geblunderd! Allerlei vormen van "wishful thinking" zijn uitgeprobeerd om van het bestaan van de laatste term in g'' af te komen. Slechts een enkeling heeft begrepen dat de woordjes "polynoom van graad $2n$" er niet voor niets staan. . . .*

b. Laat zien dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g'(x)\sin x - g(x)\cos x\right) = f(x)\sin(x)$. 2 pt.

Er geldt:

$$\begin{aligned}(g'(x)\sin x - g(x)\cos x)' &= g''(x)\sin x + g'(x)\cos x - g'(x)\cos x + g(x)\sin x\\ &= (g''(x) + g(x))\sin x\\ &= f(x)\sin x,\end{aligned}$$

wegens (a.).

c. Laat zien dat $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x = g(0) + g(\pi)$. 2 pt.

Toepassen van de Hoofdstelling en onderdeel (b.) geeft:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\ &= g'(x)\sin x - g(x)\cos x\Big|_0^\pi\\ &= -g(\pi)\cos\pi + g(0)\cos 0 = g(0) + g(\pi).\end{aligned}$$

7. Los de vergelijking $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{y}$ met beginwaarde $y(0) = 2$ op. 6 pt.

Scheiden leidt tot de integralen:

$$\int y\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

De linker integraal geeft $\frac{1}{2}y^2$. De rechter integraal behandelen we met de substitutie $u^2 = x$, $2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ en partiëel:

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2u\mathrm{e}^u - \int 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2(u-1)\mathrm{e}^u.$$

We krijgen dus, na terugsubstitutie,

$$y^2 = 4(\sqrt{x} - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c$$

Nu zijn er in principe twee oplossingen denkbaar voor y, nl. de positieve of negatieve wortel over de rechterkant. (*NB dit hebben zeer veel studenten over het* *hoofd gezien!*) Aangezien de beginwaarde $y(0) = 2$ positief is, moeten we de positieve wortel kiezen. Los daarvan bepalen we de integratieconstante door de beginwaarde in te vullen: $2^2 = 4(-1)(1) + c$, dus $c = 8$, en de oplossing luidt

$$y = +2\sqrt{(\sqrt{x} - 1)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + 2}.$$

8. Onderzoek de functie $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ en schets de grafiek. 8 pt.

1. Domein: arctan is gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$, maar $1/x$ niet in $x = 0$, dus het domein van f is $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
2. Symmetrie (*facultatief*): $f(-x) = \arctan(\frac{1}{x}) = -\arctan \frac{1}{x}$ dus f is oneven.
3. Snijpunten met assen: $f(x) = 0$ uitsluitend als $\frac{1}{x} = 0$, hetgeen onmogelijk is, dus er is geen snijpunt met de x-as. Bovendien $x = 0$ zit niet in het domein dus er is ook geen snijpunt met de y-as.
4. Gedrag aan randen domein:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{t\to0^-} \arctan t = 0^-, \\
\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{t\to-\infty} \arctan t = -\tfrac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{t\to\infty} \arctan t = \tfrac{\pi}{2}, \\
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{t\to0^+} \arctan t = 0^+.
\end{aligned}$$

   Dus f maakt een sprong aan weerszijden van $x = 0$ en heeft de x-as als asymptoot.
5. Afgeleide: $f'(x) = \dfrac{1}{1 + (1/x)^2} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{1 + x^2}$.
   We zien dat f' geen nulpunten heeft, dat $f'(x) < 0$ voor alle x in het domein, en dat f dus een dalende functie is (afgezien van de sprong weerszijden van $x = 0$).
6. Afgeleide nabij $x = 0$: er geldt $\lim_{x\to\pm0} f'(x) = -1$, d.w.z. de helling van de raaklijn gaat naar -1 in de limietpunten. *Dit is niet een standaard onderdeel*

van het onderzoek maar je hebt dit wel nodig om te weten hoe de grafiek bij de y-as aankomt.

7. Tweede afgeleide: $f''(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Deze heeft alleen een nulpunt als $x = 0$, maar dat ligt niet in het domein van f. Wel geldt dat $f''(x) < 0$ als $x < 0$ en $f''(x) > 0$ als $x > 0$, zodat f links van $x = 0$ met de bolle kant omlaag ligt en rechts met de bolle kant omhoog.

8. Tekenschema:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0^-	$-$	$-\frac{\pi}{2} \lightning \frac{\pi}{2}$	$+$	0^+
$f'(x)$		$-$	$-1 \lightning -1$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$\lightning$	$+$	

Een tekenschema hoeft niet persé, maar indien de grafiekschets niet in overeenstemming is met de verzamelde informatie terwijl een tekenschema ontbreekt, dan wel afrekenen.

9. Grafiek: