DEPARTEMENT WISKUNDE, FACULTEIT BÈTAWETENSCHAPPEN, UU.
IN ELEKTRONISCHE VORM BESCHIKBAAR GEMAAKT DOOR DE $\mathcal{TBC}$ VAN A–ESKWADRAAT.
HET COLLEGE WISN101 WERD IN 2007/2008 GEGEVEN DOOR DHR. J. VAN DE LEUR.

Uitwerking[1] Wiskundige Technieken I (WISN101) 5 november 2007

Opgave 1 *(15 punten)*

a) Bereken: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3}$.

antwoord: Teller en noemer zijn beide gelijk aan 0, dus pas 'l Hopital toe. Herhaal dit proces een aantal keer, dit geeft:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{12x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{12} = \frac{-1}{12}\,.$$

b) Bereken de hoek tussen de volgende twee vectoren: $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ en $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$.

antwoord: Aangezien $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, staan de twee vectore loodrecht op elkaar en is de hoek dus 90 graden.

c) Is $g(x) = \frac{x^5 + x^2}{x^3 + 1}$ een even, oneven functie of geen van beide?

antwoord: Het goede antwoord is geen van beide, omdat de functie in $x = -1$ niet gedefiniëerd is en in $x = 1$ wel. Als je als Domein neemt $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, dan is de functie even, omdat dan $g(x) = x^2$ en dus $g(-x) = g(x)$.

Opgave 2 *(15 punten)*

Bepaal de locale maxima en minima van de functie $f(x) = x^2e^{-x}$.
antwoord: $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$, dus $f'(x) = 0$ voor $x = 0$ en $x = 2$ en dit zijn dan ook de stationaire punten. $f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$ en $f''(0) = 2 > 0$ en $f''(2) = -2e^{-2} < 0$, dus bij $x = 0$ hebben we een locaal minimum $f(0) = 0$ en bij $x = 2$ hebben we een locaal maximum $f(2) = 4e^{-2}$.

Opgave 3 *(10 punten)*

a) Bepaal het reële en imaginaire deel van $\frac{2 - i}{3 - 4i}$.

antwoord: $\frac{2 - i}{3 - 4i} = \frac{2 - i}{3 - 4i}\frac{3 + 4i}{3 + 4i} = \frac{10 + 5i}{25} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$. Dus het reële deel is $\frac{2}{5}$ en imaginaire deel $\frac{1}{5}$.

[1] Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: tbc@a-eskwadraat.nl

b) Bepaal alle complexe oplossingen van $z^4 = -4i$.

antwoord: $-4i = 4e^{-\frac{1}{2}\pi i + 2k\pi i}$, laat $z = re^{i\phi}$, dan is $z^4 = r^4 e^{4i\phi}$, dus $r = \sqrt{2}$ en $\phi = -\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi$. Dit geeft 4 oplossingen namelijk $z = \sqrt{2}e^{(-\frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}k\pi)i}$ met $k = 0, 1, 2, 3$ (N.B. $k = 4$ geeft dezelfde oplossing als $k = 0$).

Opgave 4 *(10 punten)*

Los het volgende stelsel op:

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ 2x + 3y &= 2 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

antwoord: Pas Gauss eliminatie toe, dit geeft uiteindelijk het antwoord $x = 4$, $y = -2$ en $z = 1$.

Opgave 5 *(10 punten)*

Geef een primitieve van $f(x) = \cos^5(x)$.
antwoord:

$$\begin{aligned} \int \cos^5(x)\,dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\,d(\sin x) \\ &= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c\,. \end{aligned}$$

Opgave 6 *(10 punten)*

Geef de 2^e-orde Taylorbenadering (d.w.z. hoogste macht die voorkomt is x^2) van de functie $f(x) = (1 + x)^{-2}$ in het steunpunt 0.
antwoord: $f'(x) = -2(1 + x)^{-3}$, $f''(x) = 6(1 + x)^{-4}$ en $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$ en $f''(0) = 6$. Dus de tweede orde Taylorbenadering is

$$1 + \frac{f(0)}{0!} + \frac{f1(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - 2x + 3x^2\,.$$

Opgave 7 *(10 punten)*

Bepaal indien mogelijk de inverse van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Toon anders aan dat deze matrix geen inverse heeft.
antwoord: Met behulp van vegen of de ädjacent matrix", krijgen we

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Opgave 8 *(10 punten)*

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} .$$

antwoord:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5) = 0$$

Dus eigenwaarden $\lambda = 3$ en $\lambda = 5$. Bepaling eigenvectoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$\lambda = 3$:

$$\det \begin{pmatrix} 7-3 & 2 \\ -4 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geeft de vergelijking $2x + y = 0$, dus een eigenvector is $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\lambda = 5$:

$$\det \begin{pmatrix} 7-5 & 2 \\ -4 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geeft de vergelijking $x + y = 0$, dus een eigenvector is $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Opgave 9 *(10 punten)*

De lineaire afbeelding $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heeft de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Toon aan dat de afbeelding niet inverteerbaar is en geef een vergelijking waaraan een vector uit $C\left(\mathbb{R}^3\right)$ voldoet.

antwoord: De determinant is gelijk aan 0, dus de afbeelding is niet inverteerbaar. Het beeld wordt dus opgespannen door de kolomvectoren van C. Stel nu $ax+by+cz = 0$ is de vergelijking van de beeldruimte. Door de kolomvectoren hierin in te vullen krijgen we drie vergelijkingen voor de variabelen $a,\ b,\ c.$ dit levert $a = b = c$. Maak een niet nul keuze voor a, bijvoorbeeld $a = 1$, dit levert de vergelijking $x + y + z = 0$.