In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISN101 werd in 2008/2009 gegeven door J.W. van de Leur.

Uitwerking[1] Wiskundige Technieken I (WISN101)
3 november 2008

Opgave 1 *(10 punten)*

Het cijfer dat u voor werkcollegequiz 1 hebt behaald wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

a) Ontbind $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ in factoren.

Door proberen zie je dat $x = 1$ een oplossing is, Vervolgens kun je $x - 1$ uitdelen en dit geeft $x^2 - x - 6$, dat te schrijven is als $(x - 3)(x + 2)$. Dus

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)\,.$$

b) Bepaal een vector die loodrecht staat op de vectoren $\mathbf{a} = (-1, 1, 1)$ en $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$.

Door het uitproduct van deze twee vectoren te berekenen krijg je een vector die loodrecht staat op $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$, dus bijvoorbeeld $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3, 2, 1)$.

Opgave 2 *(10 punten)*

Het cijfer dat u voor werkcollegequiz 2 hebt behaald wordt vergeleken met het puntenaantal dat u voor deze opgave behaalt. Het hoogste van beide telt.

a) Geef de poolcoördinaten van het punt $(-7, -2)$.

$-7 = r\cos\phi$, $-2 = r\sin\phi$, *waarbij* $r = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$. *Omdat het punt in het derde kwadrant ligt krijgen we* $\phi = \arctan\frac{2}{7} + \pi$.

b) Geef de vergelijking van het vlak door de punten $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 2)$ en $(-1, 0, 2)$.

Richtingsvectoren van het vlak zijn bijvoorbeeld

$$(2, 2, 2) - (1, 2, 3) = (1, 0, -1) \quad en \quad (1, 2, 3) - (-1, 0, 2) = (2, 2, 1)\,.$$

Bereken het uitproduct van deze twee richtingsvectoren dit geeft de vector $(2, -3, 2)$, de nornaamvector van het vlak. De vergelijking van het vlak is dus $2x - 3y + 2z = c$. Door nu een punt van het vlak in te vullen kunnen we c bepalen, dit geeft $c = 2$.

Opgave 3 *(10 punten)*

Bepaal de coördinaten van de locale maxima en minima van de functie $f(x) = x^2 \ln x$ voor $x \in (0, \infty)$.

$f'(x) = x(2\ln x + 1)$, een noodzakelijke voorwaarde voor een lokaal max of min is dat de afgeleide van de functie daar $= 0$ moet zijn. Dit geeft $x = 0$ en $\ln x = -\frac{1}{2}$. In $x = 0$ is de functie niet gedefiniëerd dus is de enige mogelijkheid $x = e^{-\frac{1}{2}}$. We bepalen de tweede afgeleide, die is gelijk aan $f''(x) = 2\ln x + 3$ als we daarin $x = e^{-\frac{1}{2}}$ invullen, krijgen we $f''\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2 > 0$. Aangezien dit groter dan 0 is hebben we te maken met een minimum. We berekenen tenslotte de functiewaarde $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1}$, dit geeft als coördinaat voor het minimum $\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}e^{-1}\right)$.

[1]Deze uitwerkingen zijn met de grootste zorg gemaakt. In geval van fouten kan de $\mathcal{TBC}$ niet verantwoordelijk worden gesteld, maar wordt zij wel graag op de hoogte gesteld: `tbc@a-eskwadraat.nl`

Opgave 4 *(10 punten)*

Geef de 2^e-orde Taylorbenadering (d.w.z. hoogste macht die voorkomt is x^2) van de functie $f(x) = \arctan x$ in het steunpunt 0.

We berekenen de afgeleide en de tweede afgeleide:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

dus

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1 \qquad \textit{en} \qquad f''(0) = 0\,.$$

Dit geeft als tweede orde Taylor benadering:

$$\frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = x\,.$$

Opgave 5 *(10 punten)*

Los het volgende stelsel op:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 5 \\ x + 3y &= 2 \\ x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

We vegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \quad \textit{dit geeft} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right),$$

waaruit we $z = 9$, $y = 6$ en $x = -16$ afleiden.

Opgave 6 *(10 punten)*

Bepaal indien mogelijk de inverse van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Toon anders aan dat deze matrix geen inverse heeft.

Opnieuw vegen, nu

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \textit{dit geeft} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{30} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \end{array}\right).$$

Dus de inverse matrix is

$$\begin{pmatrix} \frac{11}{30} & \frac{1}{30} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

Opgave 7

(10 punten)

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Los op

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1) .$$

Dus $\lambda = 4$ *of* $\lambda = -1$.
$\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 3 \\ 2 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{dit geeft} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2a \end{pmatrix} \quad \textit{met } a \in \mathbb{R}.$$

Voor $a \neq 0$ *is dit een eigenvector. Evenzo vinden we voor* $\lambda = -1$ *de eigenvectoren* $\begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$ *met* $0 \neq a \in \mathbb{R}$.

Opgave 8

(10 punten)

Bepaal door $e^{(2+3i)x}$ te integreren een primitieve van $e^{2x} \sin 3x$.

$$\begin{aligned} \int e^{(2+3i)x}\, dx &= \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)x} + a + bi \\ &= \frac{2-3i}{(2^2+3^2)} e^{(2+3i)x} + a + bi \\ &= \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13} i\right) e^{2x} \left(\cos(3x) + i\sin(3x)\right) + a + bi \, . \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x \, dx &= \mathrm{Im} \left\{ \left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13} i\right) e^{2x} \left(\cos(3x) + i\sin(3x)\right) + a + bi \right\} \\ &= e^{2x} \left(-\frac{3}{13}\cos(3x) + \frac{2}{13}\sin(3x) \right) + b \, . \end{aligned}$$

Opgave 9

(10 punten)

Bepaal alle complexe oplossingen van $z^6 = -64$.

Schrijf $z = re^{i\phi}$, *dan is*

$$z^6 = r^6 e^{6i\phi} = -64 = 2^6 e^{(-\pi + 2k\pi)i} , \; \textit{met } k \in \mathbb{Z} ,$$

ofwel

$$z = 2e^{(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3})i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5 .$$

Dit geeft $z = \pm 2i$, $z = \sqrt{3} \pm i$ *en* $z = -\sqrt{3} \pm i$.

Opgave 10

(10 punten)

Bepaal het zwaartepunt van het gebied dat begrensd wordt door de functies $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ en de lijn $x = 4$ (we nemen dus $x \in [0, 4]$).

Aangezien het gebied spiegelsymmetrisch is rond de x-as is de y-coördinaat van het zwaartepunt gelijk aan 0. De x-coördinaat van het zwaartepunt is gelijk aan

$$\frac{\int_0^4 x \cdot 2x^4 dx}{\int_0^4 2x^4 dx} = \frac{\left[\frac{2}{6}x^6\right]_0^4}{\left[\frac{2}{5}x^5\right]_0^4} = \frac{10}{3}\,.$$