Departement Natuur- en Sterrenkunde, Faculteit Bètawetenschappen, UU.
In elektronische vorm beschikbaar gemaakt door de $\mathcal{TBC}$ van A–Eskwadraat.
Het college WISN102 werd in 2009/2010 gegeven door .

# Wiskundige Technieken II (WISN102)
# 15 maart 2010

- Geef niet alleen de antwoorden, maar laat ook de afleidingen van de antwoorden zien.
- Alle opgaven tellen even zwaar.

## Opgave 1

Vind de primitieven van

a) $f(x) = x^2 \cos(5x)$.

b) $g(x) = x \cos(5x^2)$.

## Opgave 2

Bepaal de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$x'' - 2x' + 2x = 0$$

welke ook voldoet aan

$$x(0) = 2 \quad \text{en} \quad x'(0) = -1.$$

## Opgave 3

Het punt $(1, 1)$ is een evenwichtspunt van het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xy + x^2 - y - x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = xy - x - 2y + 2.$$

a) Bepaal de overige evenwichtspunten. (Hint: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ als $x = 1$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ als $y = 1$.)

b) Bereken de lineaire benadering rond het evenwichtspunt $(1, 1)$.

c) Is het evenwichtspunt $(1, 1)$ stabiel of instabiel? Geef ook met argumenten aan hoe een oplossing zich in de buurt van het punt $(1, 1)$ gedraagt (denk hierbij aan begrippen als zadelpunt en spiraalpunt, gaat de oplossing naar het evenwichtspunt toe of af).

## Opgave 4

Gegeven het vectorveld $\mathbf{F} = \left(\frac{\sqrt{yz}}{\sqrt{x}}, \frac{\sqrt{xz}}{\sqrt{y}}, \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{z}}\right)$, op het gebied in $\mathbb{R}^3$ waar $x > 0$, $y > 0$ en $z > 0$, bepaal een functie $f(x, y, z)$ zo dat $\mathbf{F} = \nabla(f)$. Wat is de rotatie van $\mathbf{F}$?

## Opgave 5

a) Bepaal, met behulp van impliciete differentiatie, de richtingscoëfficient in elk punt op de kromme gegeven door de vergelijking

$$3x^3 + 5y^3 = 29.$$

b) Bepaal de raaklijn aan deze kromme in het punt (2,1). (Als je deel (a) niet hebt kunnen maken, neem dan de richtingscoëfficient gelijk aan $a$.)

## Opgave 6

Laat $V$ de eenheidskubus zijn, $V = \{(x,y,z) : \ 0 \leq x,y,z \leq 1\}$, en $\mathbf{F}$ het vectorveld $\mathbf{F} = (2xy, 2yz, 2xz)$. Bereken $\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{n} \ dS$, met $\overrightarrow{n}$ de naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector, met behulp van de stelling van Gauss.

## Opgave 7

Laat $\mathbf{F}$ het vectorveld $\mathbf{F} = (2z, 3x, 5y)$ zijn en $S$ het oppervlak geparameteriseerd door

$$\mathbf{s}(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), 4 - r^2), \qquad 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

a) Schets de doorsneden van het oppervlak $S$ met het $(x,y)$- $(y,z)$- en $(x,z)$-vlak. Wat is de rand $\partial S$ van $S$?

b) Bereken $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ direct.

c) Bereken $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ met behulp van de stelling van Stokes. (Hint: de naar buiten gerichte eenheidsnormaalvector $\overrightarrow{n}$ bepaal je met beulp van $\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = (2r^2\cos(\theta), 2r^2\sin(\theta), r)$.)