Tentamen WISN102 Wiskundige Technieken 2

Ma 27 jan 2014 13:30–16:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van electronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- Hanteer (indien je wilt) de notatie $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_{12} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$ etc.
- **Let op je tijd!** Totaal 44 punten.

1. (3pt, 3pt)
Gegeven is een matrix A en twee vectoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$, met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 21 \\ 1 & 4 & 49 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. Vind zo mogelijk alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b. Vind zo mogelijk alle oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

2. (4pt)
Bepaal de absolute minima en maxima van $f(x, y) = x(y - x)(1 - y)$ op het gesloten vierkant met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ en $(0, 1)$.

3. (6pt)
Bereken $\displaystyle\iiint_R y \,\mathrm{d}V$ als het lichaam R is beschreven door:

$$x^2 + y^2 \leq 4, \qquad 0 \leq y, \qquad 0 \leq z \leq y + 3.$$

4. (4pt, 4pt, 4pt)

a. Stel φ is een scalarveld op $\mathbb{R}^3$ en $\mathbf{F}$ een vectorveld op $\mathbb{R}^3$. Toon aan: $\nabla \bullet (\varphi \mathbf{F}) = \nabla\varphi \bullet \mathbf{F} + \varphi(\nabla \bullet \mathbf{F})$.

b. Laat $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ en $r = |\mathbf{r}|$ en φ een differentiëerbare functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$. Laat met bovenstaande zien dat $\nabla \bullet \big(\varphi(r)\mathbf{r}\big) = r\varphi'(r) + 3\varphi(r)$.

c. Als bovendien $\varphi(r)\mathbf{r}$ divergentievrij (=solenoide) is, vind dan φ.

Z.O.Z.

5. (4pt, 4pt, 4pt)
Gegeven is het vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = (2y^2 - z^2)\mathbf{i} + 4xy\mathbf{j} + (\frac{1}{3}z^3 - 2xz)\mathbf{k}$.

a. Controleer eerst dat $\mathbf{F}$ conservatief is[1], en vind dan een potentiaal van $\mathbf{F}$.

b. Bereken $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, waarin $\mathcal{C}$ de doorsnijding is van het vlak $z = 4$ met het oppervlak $z = x^2 + y^2$ tussen de punten $(2, 0, 4)$ en $(0, 2, 4)$.

c. Bereken de flux van $\mathbf{F}$ door het boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ met de divergentiestelling.

6. (4pt)
Laat $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ en $\mathbf{a}(t)$ respectievelijk de plaats, snelheid en versnelling van een deeltje zijn. Gegeven is dat $\mathbf{a}$ steeds loodrecht staat op $\mathbf{r}$ en $\mathbf{v}$. Laat zien dat de vector $\mathbf{r} - t\mathbf{v}$ constante lengte heeft.

[1] Strikt genomen: op enkelvoudig samenhangende gebieden, maar dat mag je achterwege laten.