Stromingsleer & Transportverschijnselen
Tussentoets 2

NS-265B

1 April 2016, 15:15 tot 16:45

- Geen open boek tentamen; Geen rekenmachine nodig.
- Een enkele wiskundige relaties staan op pagina 4.
- Het cijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 3.
- Maak elke opgave (1 & 2) op aparte bladen!
- Schrijf op het antwoordblad enkel je **studentnummer**, **niet** je naam.

1 Warmtetransport in een half-oneindige staaf [17 pt]

We beschouwen een half-oneindige staaf ($x \in [0,\infty)$) met dichtheid ρ, warmtecapaciteit c_v en warmtegeleidingscoëfficient k. De relevante vergelijking - hier in 3D - is in dit geval

$$\begin{aligned} \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} &= k\nabla^2 T && (1) \\ -k\nabla T &= \vec{q} && (2) \end{aligned}$$

waarin $\vec{q}$ het warmtetransport is en we κ definiëren met $\kappa = k/(\rho c_v)$.
Op $t = 0$ heeft de staaf een uniforme temperatuur T_0 en vanaf $t > 0$ wordt er Q energie per seconde op $x = 0$ toegevoegd.
We gaan dit probleem oplossen met de hulp van de Laplace transformatie, waarbij $\Theta(x,s) = \mathcal{L}(T(x,t))$ en $Q(x,s) = \mathcal{L}(q(x,t))$.

a 3pt) Voer de Laplace transformatie op vergelijking (1) om zo de relatie voor $\Theta(s,x)$ te vinden.

b 2pt) Laat zien dat het antwoord bij a)

$$\Theta(s,x) = C_{\pm}e^{\pm x\sqrt{s/\kappa}} + \frac{T_0}{s} \qquad (3)$$

als algemene oplossing heeft.

c 4pt) Beargumenteer waarom $C_+ = 0$; vertaal de twee andere randvoorwaarden voor dit probleem naar randvoorwaarden van $\Theta(s,x)$ en bepaal $\Theta(s,x)$.

De oplossing gevonden bij c) is terug te transformeren naar een oplossing voor T, echter dat is te bewerkelijk voor deze toets. We kunnen, daarentegen, wij vrij eenvoudig $q(x,t)$ bepalen.

d 4pt) Leidt $Q(s,t)$ en vervolgens $q(x,t)$ af met vergelijking (2) uit de oplossing van c)* en controleer of de oplossing voldoet aan de gestelde randvoorwaarde.

e 4pt) Beargumenteer, gebruikmakend van je kennis van diffusie, of $T(x,t)$ op $x = 0$ proportioneel is naar t volgens

1. $T(0,t) \sim \sqrt{t}$,
2. $T(0,t) \sim t$,
3. $T(0,t) \sim t^2$.

*Als je c) niet hebt kunnen maken, neem dan aan dat C_- in vergelijking (3) gelijk is aan $Cs^{-1/2}$. Deze oplossing geeft een werkbare uitdrukking maar voldoet echter niet aan de gestelde randvoorwaarden.

2 Thin film stroming tussen twee platen [13 pt]

We beschouwen de stroming tussen twee platen[†]. De eerste bevindt zich op $z = 0$ en beweegt met snelheid U in de x-richting. De tweede plaat beweegt niet ($U = 0$) maar heeft een golvend oppervlak met hoogte $\eta(x)$, gegeven door

$$\eta(x) = H + A\cos(2\pi x/L), \quad L \gg H > A \geq 0.$$

We beschouwen een onsamendrukbare vloeistof met constante dichtheid ρ, en een situatie waarin de Navier-Stokes vergelijkingen (na aftrek van de hydrostatische balans) kunnen worden vereenvoudigd tot de 'thin film' vergelijkingen

$$0 = -\nabla p + \mu \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial z^2} \qquad \text{en} \qquad \nabla \cdot \vec{u} = 0. \tag{4}$$

In voor deze stroming en situatie wordt $\vec{U} \approx \{u(x,z), 0, 0\}$.

a 4pt) Bepaal

$$F(x) \equiv \int_0^{\eta(x)} u(x,z)\,\mathrm{d}z$$

als functie van U, $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ en $\eta(x)$.

b 3pt) Wat is de fysische betekenis van $F(x)$?

c 3pt) Waarom moet gelden dat $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$? Kan $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$ zijn voor $A \neq 0$?

d 3pt) Is $\dfrac{\partial F}{\partial A} > 0$ of 0 of < 0? Beargumenteer je antwoord.

[†]Hints:
1) Maak eerst een schetsje.
2) Deelvragen b, c en d kun je met behulp van fysisch inzicht ook maken als je a) niet hebt.

Laplace transformaties

Voor de onderstaande elementaire functies is de Laplace transformaties gedefiniëerd als: $F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt.$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	
a	as^{-1}	$s > 0$
at	as^{-2}	$s > 0$
$\dfrac{at^{n-1}}{(n-1)!}$	as^{-n}	$s > 0$
$(\pi t)^{-1/2}$	$s^{-1/2}$	$s > 0$
$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$s^{-3/2}$	$s > 0$
e^{at} $, a \in \mathbb{R}$	$(s-a)^{-1}$	$s > a$
$te^{at},\ a \in \mathbb{R}$	$(s-a)^{-2}$	$s > a$
$(a-b)^{-1}(e^{at} - e^{bt})$	$(s-a)^{-1}(s-b)^{-1}$	
$(a-b)^{-1}(ae^{at} - be^{bt})$	$s^{-1}(s-a)^{-1}(s-b)^{-1}$	
$a^{-1}\sin(at),\ a \in \mathbb{R}$	$(s^2+a^2)^{-1}$	$s > 0$
$\cos(at)$	$s(s^2+a^2)^{-1}$	$s > 0$
$(\pi t)^{-1/2} - a\exp\{a^2 t\}\ \mathrm{Erfc}[at^{-1/2}]$	$(s^{1/2}+a)^{-1}$	
$\dfrac{k}{\sqrt{4\pi t^3}}\exp\{-k^2/4t\},\ k > 0$	$\exp\{-ks^{1/2}\}$	$s > 0$
$\mathrm{Erfc}\left[\dfrac{k}{2}t^{-1/2}\right],\ k > 0$	$s^{-1}\exp\{-ks^{1/2}\}$	$s > 0$
$\exp\{a^2 t\}\ \mathrm{Erf}\left[at^{-1/2}\right]$	$s^{-1/2}(s^{1/2}+a)^{-1}$	
$\sinh(at)$	$a(s^2-a^2)^{-1}$	$s > \mid a \mid$
$\cosh(at)$	$s(s^2-a^2)^{-1}$	$s > \mid a \mid$