Stromingsleer & Transportverschijnselen
Tussentoets 2

NS-265B

20 Maart, 15:15 - 16:45

- Geen open boek tentamen.
- Geen rekenmachine.
- Schrijf iedere opgave op een apart vel - lever ook dit vel in als je geen antwoord geeft.

1 Straling [8 pt]

Max Planck poneerde dat straling gekwantificeerd was en vond zodoende onder andere u_ω, de relatie van de spectrale verdeling van de stralingsenergie per m^{-3}:

$$u = \frac{U}{V} \equiv \int_0^\infty u_\omega \, \mathrm{d}\omega = \frac{\pi^2 \tau^4}{15\hbar^3 c^3}; \qquad u_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/\tau) - 1}. \tag{1}$$

We beschouwen de straling binnen een perfecte 'black box' met lengte L. In de 'box' zijn stralingsmodes mogelijk met eigenschappen

$$\omega = n\pi c/L; \quad \text{Som over alle modes} = \sum_n (\ldots) \simeq \frac{2}{8} \int_0^\infty (\ldots) \, 4\pi n^2 \, \mathrm{d}n.$$

a 4pt) Bereken $u_{k,\omega}$ (dus het klassieke equivalent van u_ω) en laat zien dat voor $\omega \downarrow 0$ de klassieke en gekwantificeerde methode hetzelfde resultaat geven. Gebruik

$$U_k = \sum_n \langle e_k \rangle \simeq \sum_n \tau,$$

waarbij U_k de totale stralingsenergie in de box is, vergelijkbaar met U in de gekwantificeerde analyse.

Voor het tweede deel van deze opgave beschouwen we een materiaal dat alleen op de hoekfrequentie ω_{PEB} straling kan uitzenden. De energie per volume (u_{PEB}) in de box wordt voor dit materiaal beschreven door

$$u_{\mathrm{PEB}}(\omega_{\mathrm{PEB}}, \tau) \simeq \frac{\hbar b_{\mathrm{PEB}}}{\pi^2 c^3} \frac{\omega_{\mathrm{PEB}}^3}{\exp(\hbar\omega_{\mathrm{PEB}}/\tau) - 1},$$

waarbij b_{PEB} een constante is die weergeeft over welk frequentie-interval rond ω_{PEB} de emissiviteit 1 is.

b 4pt) Leg uit waarom voor $\tau \to \infty$, u_{PEB} fundamenteel anders is dan u van een perfecte emitter (zie vergelijking (1)).

2 Dilatante stroming door een pijp [12 pt]

We beschouwen een tijdsconstante laminaire stroming van een dilatantante vloeistof door een pijp met straal R. De impulsvergelijkingen van de stroomsnelheid in cilindercoördinaten worden, na het verwijderen van de meeste nul-termen, gegeven door ($\vec{x} = \{z, r, \theta\}$, $\vec{u} = \{u_z(r, z), u_r = 0, u_\theta = 0\}$):

$$u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} \qquad \tau_{zz} \equiv \mu(|\tau(r, z)|)\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\tau_{rz} \equiv \mu(|\tau(r, z)|)\frac{1}{2}\frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} \qquad 0 = \tau_{rr} = \tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = \tau_{\theta\theta},$$

met andere woorden, μ is een functie van de spanning τ.
De continuïteitsvergelijking wordt gegeven door

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

a 3pt) Laat zien dat $\frac{\partial p}{\partial z}$ constant moet zijn.

We gebruiken dat $\frac{\partial p}{\partial z} = \alpha$, met $\alpha < 0$.
De viscositeit μ wordt deze vloeistof en situatie (dus $|\tau(r, z)| \sim \tau_{rz}$) gegeven door

$$\mu(|\tau(r, z)|) = \begin{cases} \mu_0/(\tau_0 - |\tau_{rz}|) & |\tau_{rz}| < \tau_0 \\ \infty & |\tau_{rz}| \geq \tau_0 \end{cases}$$

b 5pt) Bepaal $u_z(r)$ gegeven de volgende 3 randvoorwaarden:

1) $\tau_{rz}(r = 0) < \infty$, 2) $u_z(r = R) = 0$, 3) $R \leq r_0$ met $r_0 \equiv -2\tau_0/\alpha$.

De totale flux F door de pijp, $F \equiv \int_0^R u_z(r)\, 2\pi r\, dr$, wordt gegeven door

$$F(\alpha) = \begin{cases} -\dfrac{\pi\alpha\tau_0 R^4}{4\mu_0} - \dfrac{\pi\alpha^2 R^5}{10\mu_0} & -\alpha \leq 2\tau_0/R \\[2ex] -\dfrac{4\pi\tau_0^5}{5\alpha^3\mu_0} & -\alpha \geq 2\tau_0/R \end{cases}$$

c 4pt) Geef een fysische verklaring van de afhankelijkheid van F naar α.

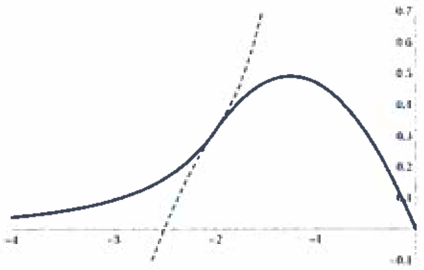

Figure 1: F als functie van α voor $\mu_0 = \tau_0 = R = 1$. Gestippeld zijn de twee deeloplossingen.