# Introduction to Geometry: final exam

April 11th, 2018

- Use a separate sheet for each exercise!
- Distribution of points: **Q1: 3** (1+1+1), **Q2: 3** (0.75 + 0.75 + 0.75 + 0.75), **Q3: 3** (1 + 1 + 1), **Q4: 1**. This distribution does not necessarily represent how difficult a problem is.
- Write your name and student number clearly on ever piece of paper.
- Books, notes, computers, tablets, mobile phones or any other materials or electronic devices are forbidden.
- Do not just provide answers, but with each (partial) assignment show and reason clearly how you arrive at that step; when you claim something, prove it.
- Even if you cannot prove one part of the assignment, you are allowed to use that result later on.

## Question 1

In this exercise, $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Let $A$, $B$, $C$ and $D$ be four distinct points lying on the sphere $\mathbb{S}^2$. We assume that the distances $\alpha = d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$, $\beta = d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$, $\gamma = d_{\mathbb{S}^2}(C, D)$ and $\delta = d_{\mathbb{S}^2}(D, A)$ are all smaller than $\pi$. Suppose that the dihedral angles $\angle ABC$ and $\angle CDA$ are both equal to $\frac{\pi}{2}$. Show that $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma\cos\delta$.

(b) Prove that the metric spaces $\mathbb{S}^2$ and $\mathbb{E}^2$ (with their usual distance functions) are not isometric. (That is, prove that there does not exist an isometry $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2$.)

(c) Show that every direct isometry of $\mathbb{E}^2$ can be written as the composition of two rotations.

## Question 2

The upper half-plane is the set $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. (Recall that if $z = x + yi$ with $x, y \in \mathbb{R}$ is a complex number, then $\mathrm{Im}(z) = y$.) On this set, we define a distance function by

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)}\right) \quad \text{for } z_1, z_2 \in \mathcal{H}.$$

This makes $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ into a model of the hyperbolic plane (you do not have to prove this). For $a, b \in \mathbb{R}$ with $a > 0$, we define the function $T_{a,b} \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ by

$$T_{a,b}(z) = az + b \quad \text{for } z \in \mathcal{H}.$$

(a) Show that $T_{a,b}(z) \in \mathcal{H}$ for all $z \in \mathcal{H}$.

(b) Show that $T_{a,b}$ is distance-preserving with respect to $d_{\mathcal{H}}$.

(c) Show that $T_{a,b}$ is an isometry of $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$.

(d) Let $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ be given. Find $a, b \in \mathbb{R}$ such that $a > 0$ and $T_{a,b}(z_1) = z_2$.

## Question 3

In this problem we consider the vector space $\mathbb{R}^3$ with the Lorentz inner product.

(a) Let $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ be two linearly independent vectors. Assume they are Lorentz orthogonal, and that they are both space-like (recall that a vector $\mathbf{v}$ is called space-like if $q_L(\mathbf{v}) > 0$, where $q_L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot_L \mathbf{v}$). The linear span of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ is a plane. Prove that all non-zero vectors in this plane are space-like.

(b) Let $\mathbf{p} = (t, x, y)$ give a point on the hyperbolic plane $\mathcal{H}^2$ and assume that $t > 1$. Let $V$ be the set of all vectors Lorentz orthogonal to $\mathbf{p}$. (You may use that $V$ is a 2-dimensional linear subspace of $\mathbb{R}^3$.) Prove that $\mathbf{q} = (\frac{t^2-1}{t}, x, y)$ and $\mathbf{r} = (0, y, -x)$ are Lorentz orthogonal and form a basis of $V$.

(c) Consider the plane $\Pi = \mathbf{p} + V = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}$. Prove that $q_L(\mathbf{w}) \geq -1$ for all vectors $\mathbf{w} \in \Pi$. Explain that $\Pi$ and $\mathcal{H}^2$ have exactly one intersection point.

The last part shows that $\Pi$ is tangent to $\mathcal{H}^2$ in the point $(t, x, y)$. Hence the tangent plane to $(t, x, y)$ is parallel to the Lorentz orthogonal complement of the vector $(t, x, y)$.

## Question 4

Let $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ be three points in $\mathbb{A}^2$. Prove that these three points are collinear if and only if

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Elke opgave op een apart blaadje.
- Puntenverdeling als volgt: **V1: 3** (1+1+1), **V2: 3** (0.75 + 0.75 + 0.75 + 0.75), **V3: 3** (1 + 1 + 1), **V4: 1**. Let op dat moeilijkheidsgraad niet per definitie gelijk opgaat met de hoeveelheid punten.
- Schrijf duidelijk je naam en studentnummer op elk blaadje.
- Geen hulpmiddelen zoals boeken of elektronische apparaten zoals computers of tablets toegestaan.
- Beargumenteer tussenstappen zoveel mogelijk, zorg ook dat je alles wat je claimt eerst bewijst.
- Als een bepaald bewijs niet lukt in een opgave, dan mag je het resultaat nog steeds later gebruiken in een andere opgave.

## Opgave 1

In deze opgave geldt $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(a) Laat $A$, $B$, $C$ en $D$ vier verschillende punten op de bol $\mathbb{S}^2$ zijn. We nemen aan dat de afstanden $\alpha = d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$, $\beta = d_{\mathbb{S}^2}(B, C)$, $\gamma = d_{\mathbb{S}^2}(C, D)$ en $\delta = d_{\mathbb{S}^2}(D, A)$ allemaal kleiner dan $\pi$ zijn. Veronderstel dat de dihedrale hoeken $\angle ABC$ en $\angle CDA$ beide gelijk zijn aan $\frac{\pi}{2}$. Bewijs dat $\cos\alpha\cos\beta = \cos\gamma\cos\delta$.

(b) Bewijs dat de metrische ruimten $\mathbb{S}^2$ en $\mathbb{E}^2$ (met hun gebruikelijke afstandsfuncties) niet isometrisch zijn. (Bewijs dus dat er geen isometrie $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{E}^2$ bestaat.)

(c) Bewijs dat iedere directe isometrie van $\mathbb{E}^2$ geschreven kan worden als de samenstelling van twee rotaties.

## Opgave 2

Het bovenste halfvlak is de verzameling $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. (Ter herinnering: als $z = x + yi$ met $x, y \in \mathbb{R}$ een complex getal is, dan is $\mathrm{Im}(z) = y$.) Op deze verzameling definiëren we een afstandsfunctie door

$$d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2\mathrm{Im}(z_1)\mathrm{Im}(z_2)}\right) \quad \text{voor } z_1, z_2 \in \mathcal{H}.$$

Nu is $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ een model van het hyperbolische vlak (dit hoef je niet te bewijzen). Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a > 0$ definiëren we de functie $T_{a,b} \colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ door

$$T_{a,b}(z) = az + b \quad \text{voor } z \in \mathcal{H}.$$

(a) Bewijs dat $T_{a,b}(z) \in \mathcal{H}$ voor alle $z \in \mathcal{H}$.

(b) Bewijs dat $T_{a,b}$ afstandbehoudend is ten opzichte van $d_{\mathcal{H}}$.

(c) Bewijs dat $T_{a,b}$ een isometrie van $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ is.

(d) Laat $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ gegeven zijn. Vind $a, b \in \mathbb{R}$ zodanig dat $a > 0$ en $T_{a,b}(z_1) = z_2$.

## Opgave 3

In deze opgave bekijken we de vectorruimte $\mathbb{R}^3$ met het Lorentz-inproduct.

(a) Gegeven zijn twee linear onafhankelijke vectoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Neem aan dat ze Lorentz-orthogonaal zijn, en dat beide ruimteachtig ('space-like') zijn (een vector $\mathbf{v}$ heet *space-like* indien $q_L(\mathbf{v}) > 0$, waarbij $q_L(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot_L \mathbf{v}$). Het linear opspansel van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ is een vlak. Bewijs dat alle niet-nul vectoren in dit vlak ruimteachtig zijn.

(b) De vector $\mathbf{p} = (t, x, y)$ geeft een punt op het hyperbolische vlak $\mathcal{H}^2$. Neem aan dat $t > 1$. Zij $V$ de verzameling van alle vectoren die Lorentz-orthogonaal zijn met $\mathbf{p}$. (Je mag gebruiken dat $V$ een 2-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$ is.) Bewijs dat $\mathbf{q} = (\frac{t^2-1}{t}, x, y)$ en $\mathbf{r} = (0, y, -x)$ Lorentz-orthogonaal zijn en een basis van $V$ vormen.

(c) Bekijk het vlak $\Pi = \mathbf{p} + V = \{\mathbf{p} + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in V\}$. Bewijs dat $q_L(\mathbf{w}) \geq -1$ voor alle vectoren $\mathbf{w} \in \Pi$. Leg uit dat $\Pi$ en $\mathcal{H}^2$ precies één snijpunt hebben.

Het laatste onderdeel laat zien dat $\Pi$ en $\mathcal{H}^2$ elkaar raken in het punt $(t, x, y)$. Het raakvlak in $(t, x, y)$ is dus parallel aan het Lorentz-orthogonaal complement van de vector $(t, x, y)$.

## Opgave 4

Bekijk de punten $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ in $\mathbb{A}^2$. Bewijs dat deze drie punten op één lijn liggen dan en slechts dan als

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$