EIND-TENTAMEN Zwarte Gaten 2017 - NS159B

Vrijdag, 13 April 2018, 09:00–12:00, KBG-Cosmos en Ruppert Rood, Universiteit Utrecht.

1) Schrijf je naam en studentennummer op elk oplossingsblad. **Begin elke opgave op een nieuw blad**. Bij het inleveren moet je elke opgave op een aparte stapel leggen!

2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.

3) Er zijn drie opgaven. Het gebruik van het dictaat, rekenmachines, smartphone, is niet toegestaan. Het resultaat telt mee voor 60% van het eindcijfer.

Formularium

- Newton's zwaartekrachts formule voor de kracht in de radiële richting is

$$F(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \,. \tag{0.1}$$

- Figuur bij opgave 1c) over de Roche limiet:

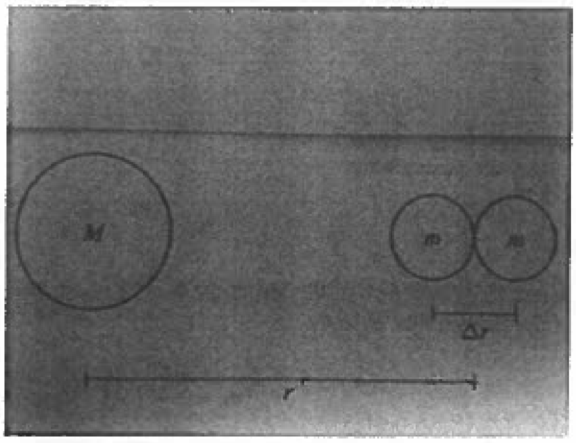

Figure 1: zie opgave 1c).

- Een deeltje dat op een cirkelvormige baan met straal R beweegt rond een massa M heeft een orbitaalsnelheid gegeven door $v = \sqrt{\frac{G_N M}{R}}$.

1. Vraagjes (20 punten)

a) Een foton/lichtgolf reist opwaarts in een zwaartekrachtsveld, en verkleint zijn frequentie als gevolg van de roodverschuiving. Via $E = \hbar\omega$ vermindert daardoor ook de energie van het foton. Het lijkt daarom dat er energie verloren gaat, en er een contradictie is met de wet van behoud van energie. Wat is er verkeerd met deze redenering?

b) Waarom is aan de binnenkant van de accretieschijf de temperatuur hoger dan aan de buitenkant? Leg uit, en gebruik eventueel de orbitaalsnelheid gegeven in het formularium.

c) Geef de betekenis en de afleiding voor de waarde van de Roche limiet,

$$r_R = \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3} \Delta r \; , \tag{0.2}$$

voor de situatie geschetst in de figuur van het formularium. Leidt hiervoor eerst de getijdekracht af voor dit systeem.

2. Speelgoed horizon (20 punten)

Beschouw de metriek in twee ruimtetijd dimensies in een ingaand Eddington-Finkelstein-achtig coördinatensysteem v en $x \in (-\infty, +\infty)$,

$$\mathrm{d}s^2 = -x\,\mathrm{d}v^2 + 2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}x \; . \tag{0.3}$$

a) Bepaal de lichtkegels in een willekeurig punt (v, x), i.e. los de vergelijking voor ingaande en uitgaande lichtstralen op voor zowel $x > 0$ als $x < 0$.

b) Teken een ruimtetijd diagram (v, x) waarin je laat zien hoe de lichtkegels veranderen als functie van x. Als je het handiger vindt kan je ook $\bar{t} \equiv v - x$ en x als coördinaten kiezen .

c) Toon aan dat de wereldlijn van een deeltje kan oversteken van $x > 0$ naar $x < 0$, maar niet terug van $x < 0$ naar $x > 0$. Met andere woorden, toon aan dat $x = 0$ een horizon is.

3. Een zwart gat metriek (20 punten)

Beschouw de volgende metriek op de ruimtetijd

$$ds^2 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2} + r^2 d\Omega^2 \,, \tag{0.4}$$

waarbij $d\Omega^2$ de metriek is op een twee-dimensionale bol, maar die verder onbelangrijk is voor deze opgave. m is de massa van een zwart gat[1]. Beschouw nu lichtstralen die radieel voortbewegen.

a) Toon aan dat deze lichtstralen voldoen aan

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 . \tag{0.5}$$

Wat betekenen de $\pm$ oplossingen? Maak een tekening in het (r,t) vlak voor $r > m$.

b) Toon vervolgens aan dat deze lichtstralen voldoen aan

$$t = \pm r_* + \text{constante} \,, \qquad r_* = r - \frac{m^2}{r-m} + 2m\ln(r-m) \,, \tag{0.6}$$

waarbij we veronderstellen dat $r > m$. Concreet: toon aan dat (0.6) een oplossing is van (0.5) en dus de banen van radieel voortbewegend licht bepalen.

c) Definieer de Eddington-Finkelstein coördinaat $v = t + r_*$ en toon aan dat de metriek geschreven kan worden als

$$ds^2 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2 \,. \tag{0.7}$$

Schrijf opnieuw de vergelijkingen op voor radieel voortbewegend licht, maar nu in de variabelen v en r. Wat gebeurt er met 'uitgaand licht' dat vertrekt vanuit het gebied binnen $r < m$? Teken dit in een (v,r) diagram, of zo je wil, met $\tilde{t} \equiv v - r$, in een $(\tilde{t}, r)$ diagram.

[1]Voor de geïnteresseerden: dit lijkt op de Schwarzschild metriek, maar is het niet. Het is de metriek voor een elektrisch geladen zwart gat waarbij de lading gelijk is aan de massa, in natuurlijke eenheden.