EIND-TENTAMEN Zwarte Gaten 2022 - NS159B

Donderdag, 30 Juni 2022, 13:30-16:30, Educatorium Gamma, Universiteit Utrecht.

1) Schrijf je naam en studentennummer op elk oplossingsblad. Bij het inleveren graag op de stapel van je groepsnummer leggen!

2) Schrijf duidelijk en leesbaar, zonder gekrabbel. Onleesbaar handschrift kan niet nagekeken worden. Structureer je antwoord goed en leg je redenering goed uit.

3) Er zijn drie opgaven. Het gebruik van het dictaat, rekenmachines, smartphone, is niet toegestaan.

4) Extra tijders krijgen een extra half uur, en leveren in ten laatste om 17:00.

Formularium

- Newton's zwaartekrachts formule voor de kracht in de radiële richting is

$$F(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r^2} \ . \tag{0.1}$$

- Figuur bij opgave 1 over de Roche limiet:

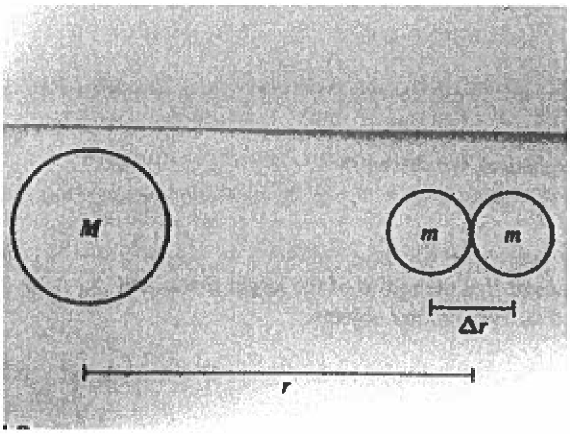

Figure 1: zie opgave 1●).

- De Taylor expansie van een functie $f(x)$ rondom een punt x_0 is gegeven door

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdots \ , \tag{0.2}$$

1. Getijdekrachten en Roche limiet (3 punten)

a) Beschouw de figuur van het formularium. Leid de formule af voor de getijdekracht ΔF,

$$\Delta F = 2\frac{G_N M m}{r^3}\Delta r \ . \tag{0.3}$$

b) Geef de betekenis en de afleiding voor de waarde van de Roche limiet,

$$r_R = \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}\Delta r \ , \tag{0.4}$$

voor de situatie geschetst in de figuur van het formularium.

c) Leg kort uit: wat is de Algol paradox and wat is de oplossing van deze paradox. Maak eventueel een schets om je antwoord te verduidelijken.

2. Rindler (3 punten)

De Rindler metriek in Rindler coordinaten (τ, z) is gegeven door

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{a^2}{c^2}z^2\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}z^2 \ , \tag{0.5}$$

waarbij a de versnelling is van de Rindler waarnemer. Voor het gemak hebben we ons beperkt tot twee ruimtetijd-dimensies.

a) Bepaal uit de Rindler metriek de wereldlijnen van in- en uitgaande lichtstralen.

b) Teken de in- en uitgaande lichtstralen in een (τ, z) diagram, en daarbij de lichtkegels. Beargumenteer dat er een horizon is en bepaal de locatie van de horizon.

c) Bereken hoe lang het duurt, in Rindler tijd τ, vooraleer een lichtstraal de horizon bereikt.

3. Een zwart gat metriek (4 punten)

Beschouw de volgende metriek op de ruimtetijd

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 \mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2} + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \ , \tag{0.6}$$

waarbij $\mathrm{d}\Omega^2$ de metriek is op een twee-dimensionale bol, maar die verder onbelangrijk is voor deze opgave. m is de massa van een zwart gat[1]. Beschouw nu lichtstralen die radieel voortbewegen.

a) Toon aan dat deze lichtstralen voldoen aan

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 . \tag{0.7}$$

Wat betekenen de $\pm$ oplossingen? Maak een tekening in het (r, t) vlak voor $r > m$.

b) Toon vervolgens aan dat deze lichtstralen voldoen aan

$$t = \pm r_* + \text{constante} \ , \qquad r_* = r - \frac{m^2}{r - m} + 2m \ln(r - m) \ , \tag{0.8}$$

waarbij we veronderstellen dat $r > m$. Concreet: toon aan dat (0.8) een oplossing is van (0.7) en dus de banen van radieel voortbewegend licht bepalen.

c) Definieer de Eddington-Finkelstein coördinaat $v = t + r_*$ en toon aan dat de metriek geschreven kan worden als

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 \mathrm{d}v^2 + 2\mathrm{d}r\mathrm{d}v + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \ . \tag{0.9}$$

d) Schrijf opnieuw de vergelijkingen op voor radieel voortbewegend licht, maar nu in de variabelen v en r. Wat gebeurt er met 'uitgaand licht' dat vertrekt vanuit het gebied binnen $r < m$? Teken dit in een (v, r) diagram, of zo je wil, met $\tilde{t} \equiv v - r$, in een $(\tilde{t}, r)$ diagram.

[1]Voor de geïnteresseerden: dit lijkt op de Schwarzschild metriek, maar is het niet. Het is de metriek voor een elektrisch geladen zwart gat waarbij de lading gelijk is aan de massa, in natuurlijke eenheden.

Liefs Sofie