Zwarte Gaten 2022 Uitwerking Jesse Straat

Opgave 1

a) We hebben de volgende Taylor-expansie:

$$\frac{1}{(r+\Delta r)^2} = \frac{1}{r^2} - 2\frac{1}{r^3}\Delta r + \mathcal{O}(\Delta r^2),$$

en dus is $F = -G_N \frac{Mm}{(r+\Delta r)^2} = -G_N Mm\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\Delta r + \mathcal{O}(\Delta r^2)\right)$

$$\Rightarrow \Delta F = \frac{2 G_N Mm}{r^3}\Delta r.$$

b) De zwaartekracht tussen de secundaire planeten is

$$F = -G_N \frac{m^2}{\Delta r^2}$$

Rochelimiet: $G_N \frac{m^2}{\Delta r^2} = \frac{2G_N Mm}{r^3}\Delta r$

$$\Rightarrow \quad r^3 = 2\frac{M}{m}\Delta r^3$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{2M}{m}\right)^{1/3}\Delta r.$$

~~c)~~ Betekenis: de zwaartekracht tussen de secundaire planeten wordt precies gecanceld door de getijdekracht.

c) De Algol paradox houdt in dat in een binair systeem de verder geëvolueerde ster niet altijd de zwaarste is. Dit was tegenstrijdig met ons begrip van cosmologie.

De oplossing was dat sterren in binaire systemen massa kunnen overdragen als hun straal groter dan de Roche lobe zijn.

Opgave 2

a) $ds^2 = 0$ voor licht

$$\Rightarrow \quad dz^2 = \frac{a^2}{c^2} z^2 d\tau^2$$

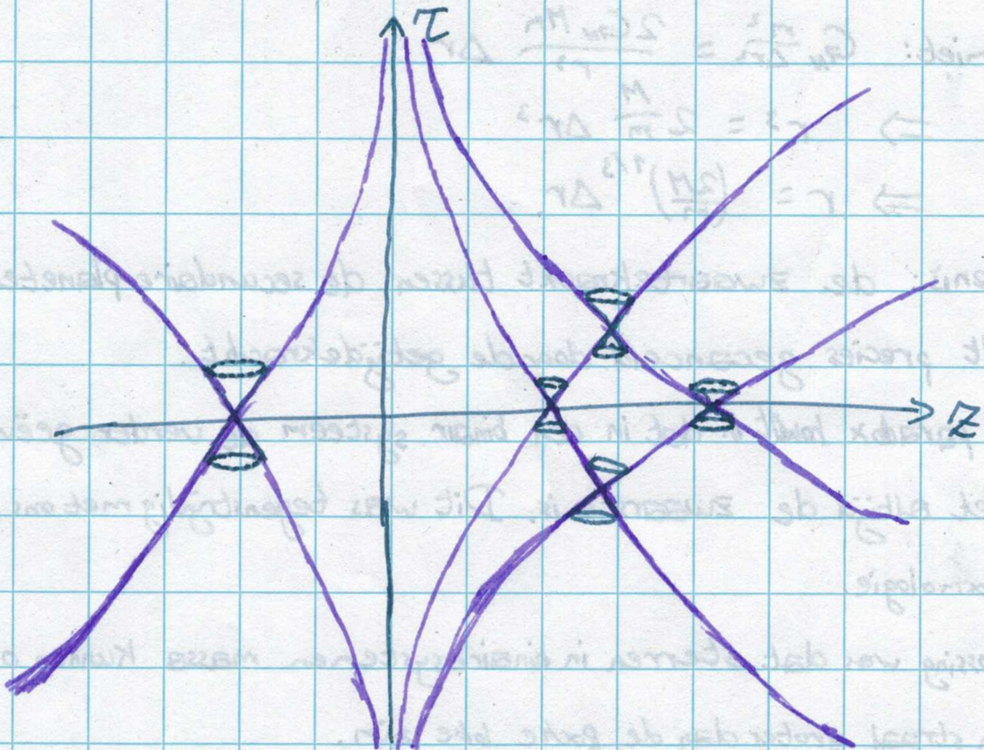
$$dz = \pm \frac{a}{c} z \, d\tau$$

$$\frac{dz}{z} = \pm \frac{a}{c} d\tau$$

$\Rightarrow$ integrate: $\ln\left|\frac{z(\tau)}{z(0)}\right| = \pm \frac{a}{c}\tau$

$$z(\tau) = z(0)\, e^{\pm \frac{a}{c}\tau}.$$

b)



~~Er is een horizon op z=0 omdat je dit niet kunt bereiken buiten z=0.~~

We hebben een horizon als de metriek degenerate is. Dit gebeurt precies op $-\frac{a^2}{c^2} z^2 = 0 \Leftrightarrow z=0$.

c) Voor lichtstralen geldt $z(\tau) = z(0)\, e^{\pm \frac{a}{c}\tau}$, dus $z(\tau) = 0$ alleen als $\tau \to \mp\infty$

(sign hangt af van de sign in de exponent).

Opgave 3

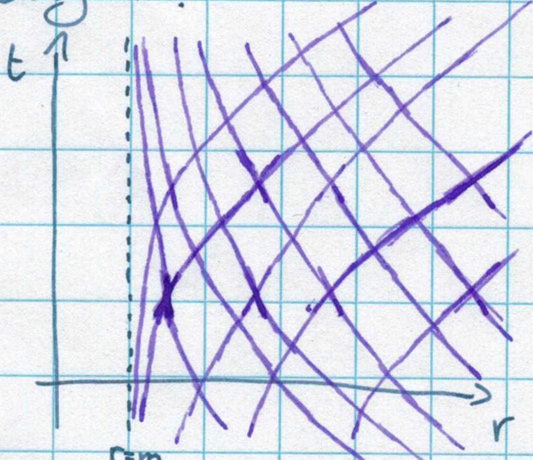
a) Voor lichtstralen is $ds^2=0$, en voor radiële stralen is $d\Omega^2=0$, dus

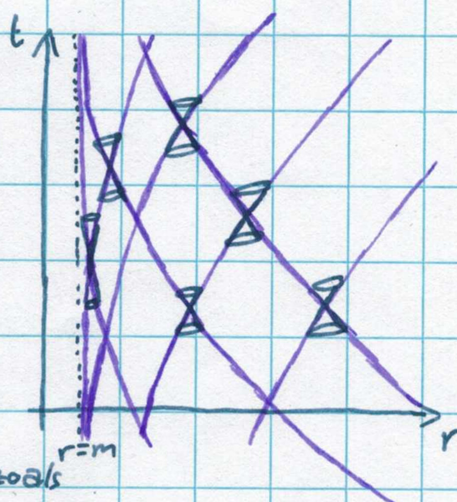
$$0 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad dr^2 = (1-m/r)^4\, dt^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \pm\, (1-m/r)^2.$$

De $\pm$ oplossingen onderscheiden lichtstralen die richting de oorsprong bewegen $^{r\to -}$ en lichtstralen die van de oorsprong af bewegen $^{r\to +}$.





Nu een minder chaotische tekening...

Voor $r \to \infty$ wordt $ds^2 = -dt^2 + dr^2$ zoals in platte ~~op~~ ruimtetijd.

b) $$\frac{dt}{dr} = \pm\left(1 + \frac{m^2}{(r-m)^2} + \frac{2m}{r-m}\right)$$
$$= \pm\, \frac{r^2 - 2mr + m^2 + m^2 + 2mr - m^2}{(r-m)^2} = \pm\, \frac{r^2}{(r-m)^2} = \pm\, \frac{1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}.$$

Dit voldoet inderdaad aan de vergelijking.

c) $$t = v - r_* \Rightarrow dt = dv - dr - \frac{m^2}{(r-m)^2}\, dr - \frac{2m}{r-m}\, dr$$
$$= dv - \frac{1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}\, dr$$

$$\Rightarrow ds^2 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2\left(dv^2 - \frac{2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2}\, dv\, dr + \frac{1}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^4}\, dr^2\right) + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{m}{r}\right)^2} + r^2 d\Omega^2$$
$$= -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2\, dv\, dr + r^2 d\Omega^2.$$

d) $0 = -\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2\, dr\, dv \Rightarrow dr = \frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{r}\right)^2 dv$ óf $dv = 0$