Opgave 1 (9 pt, ontkenning van bewering)

(a). **[2 pt]** De ontkenning van de gekwantificeerde bewering

$$\exists x \in \mathbb{R} \colon \forall y \in \mathbb{Q} \colon \; x > y,$$

luidt:

$$\begin{aligned} & \sim(\exists x \in \mathbb{R} \colon && \forall y \in \mathbb{Q} \colon && x > y) && \equiv \\ \equiv \; & \forall x \in \mathbb{R} \colon \sim(&& \forall y \in \mathbb{Q} \colon && x > y) && \equiv \\ \equiv \; & \forall x \in \mathbb{R} \colon && \exists y \in \mathbb{Q} \colon \sim(&& x > y) && \equiv \\ \equiv \; & \forall x \in \mathbb{R} \colon && \exists y \in \mathbb{Q} \colon && x \leq y \end{aligned}$$

(b). **[2 pt]** De ontkenning van de gekwantificeerde bewering

$$\forall y \in \mathbb{Q} \colon \exists x \in \mathbb{R} \colon \; x > y,$$

luidt:

$$\begin{aligned} & \sim(\forall y \in \mathbb{Q} \colon && \exists x \in \mathbb{R} \colon && x > y) && \equiv \\ \equiv \; & \exists y \in \mathbb{Q} \colon \sim(&& \exists x \in \mathbb{R} \colon && x > y) && \equiv \\ \equiv \; & \exists y \in \mathbb{Q} \colon && \forall x \in \mathbb{R} \colon \sim(&& x > y) && \equiv \\ \equiv \; & \exists y \in \mathbb{Q} \colon && \forall x \in \mathbb{R} \colon && x \leq y \end{aligned}$$

(c). **[3 pt]** Bewering A is onwaar. Voor elke $x \in \mathbb{R}$, kunnen we namelijk $y = \lceil x \rceil$ kiezen. Daarvoor geldt dan immers dat $x \leq \lceil x \rceil = y$ en $y = \lceil x \rceil$ is een geheel getal, dus geldt zeker ook dat $y \in \mathbb{Q}$. Daarmee hebben we dus, voor elke $x \in \mathbb{R}$, een tegenvoorbeeld $y \in \mathbb{Q}$ gegeven die bewering A ontkracht omdat het niet waar is dat $x > y$.

(d). **[2 pt]** Bewering B is wel waar. Immers, voor elke $y \in \mathbb{Q}$, is $x = y + 1$ een rationaal en dus zeker reëel getal waarvoor geldt dat $x = y + 1 > y$ (want $1 > 0$).

Opgave 2 (10 pt, samengestelde beweringen, waarheidstabel)

Laat P, R en S drie beweringen zijn. Geef onafhankelijk van elkaar twee bewijzen dat de samengestelde beweringen $P \Rightarrow (R \wedge S)$ en $(P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)$ logisch equivalent zijn:

(a). **[5 pt]** We maken een waarheidstabel waarin we alle mogelijke gevallen voor de waarheidswaarden van P, R en S beschouwen (T staat voor "waar" en F voor "onwaar"):

P	R	S	$R \wedge S$	$P \Rightarrow (R \wedge S)$	$P \Rightarrow R$	$P \Rightarrow S$	$(P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)$
T	T	T	T	**T**	T	T	**T**
T	T	F	F	**F**	T	F	**F**
T	F	T	F	**F**	F	T	**F**
T	F	F	F	**F**	F	F	**F**
F	T	T	T	**T**	T	T	**T**
F	T	F	F	**T**	T	T	**T**
F	F	T	F	**T**	T	T	**T**
F	F	F	F	**T**	T	T	**T**

We zien nu dat de vijfde kolom, voor $P \Rightarrow (R \wedge S)$, in alle gevallen precies dezelfde waarheidswaarden bevat als de laatste kolom, voor $(P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)$. Dus de samengestelde beweringen $P \Rightarrow (R \wedge S)$ en $(P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)$ zijn logische equivalent.

(b). **[5 pt]** Volgens de rekenregels voor logische equivalentie van beweringen geldt dat:

$$\begin{aligned}
P \Rightarrow (R \wedge S) &\equiv \sim\big(P \wedge \sim(R \wedge S)\big) \equiv \\
&\equiv (\sim P) \vee \sim\big(\sim(R \wedge S)\big) \equiv \\
&\equiv (\sim P) \vee (R \wedge S) \equiv \\
&\equiv \big((\sim P) \vee R\big) \wedge \big((\sim P) \vee S\big) \equiv \\
&\equiv \big(\sim(P \wedge \sim R)\big) \wedge \big(\sim(P \wedge \sim S)\big) \\
&\equiv (P \Rightarrow R) \wedge (P \Rightarrow S)
\end{aligned}$$

Opgave 3 (9 pt, pariteit en deelbaarheid van natuurlijke getallen)

(a). **[4 pt]** We bewijzen het contrapositief: Als a of b even is, dan is $(a^2+2)b^2$ even. We bekijken de twee gevallen dat a even is en dat b oneven.

Als a even is, dan is a^2 even en dus ook a^2+2. Het product van en even getal met een wilkeurig geheel getal is weer even en dus is $(a^2+2)b^2$ even.

Als b even is, dan is b^2 even en dus ook $(a^2+2)b^2$.

(b). **[5 pt]** We bewijzen het per inductie. Voor $n = 1$ zien we dat 5 inderdaad een deler van $2^1 + 3^1$ is. We nemen nu aan dat voor een gegeven $n \in \mathbb{N}$ het getal 5 een deler van $2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ is. We rekenen:

$$\begin{aligned}
2^{2n+1} + 3^{2n+1} &= 4 \cdot 2^{2n-1} + 4 \cdot 3^{2n-1} + 5 \cdot 3^{2n-1} \\
&= 4(2^{2n-1} + 3^{2n-1}) + 5 \cdot 3^{2n-1}
\end{aligned}$$

Beide summanden zijn door 5 deelbaar: dat is duidelijk voor de tweede en voor de eerste volgt het uit de inductieveronderstelling. Met behulp van inductie volgt hieruit dat $5 \,|\, 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$.

Alternatief: We schrijven $n = k+1$ en moeten bewijzen dat $2^{2k+1} + 3^{2k+1}$ voor iedere gehele $k \geq 0$. Omdat $2^2 \equiv -1 \mod 5$, zien we $2^{2k+1} \equiv 2 \cdot (-1)^k \mod 5$. Omdat $3^2 \equiv -1 \mod 5$, zien we $3^{2k+1} \equiv 3 \cdot (-1)^k \mod 5$. Dus $2^{2k+1} + 3^{2k+1} \equiv (-1)^k(2+3) \equiv 0 \mod 5$. Dat impliceert direct dat $5 \,|\, 2^{2k+1} + 3^{2k+1}$.

Opgave 4 (8 pt, equivalentierelatie, equivalentieklasse)

(a). **[4 pt]** Zij $(x, y) \in \mathbb{R}$. Er geldt dat $f(x, y) = f(x, y)$, dus $(x, y)S(x, y)$. Daarom is S reflexief.

Voor $i = 1, 2$ zij $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ zó, dat $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Dan geldt ook $f(x_2, y_2) = f(x_1, y_1)$. Daarom is S symmetrisch.

Voor $i = 1, 2, 3$ zij $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ zó, dat $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ en $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3)$. Dan geldt ook $f(x_1, y_1) = f(x_3, y_3)$. Daarom is S transitief.

Omdat de relatie S reflexief, symmetrisch en transitief is, is zij een equivalentierelatie.

(b). **[1 pt]** We hebben

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a,b) = f(x,y)\} = f^{-1}\big(f(a,b)\big).$$

(c). **[3 pt]** De equivalentieklasse $[(1,2)]$ is de rand van het vierkant met hoekpunten $(\pm 3, 0), (0, \pm 3)$.

Opgave 5 (12 pt, convergentie van een rij en van een functie in een punt)

(a). **[5 pt]** Zij $\varepsilon > 0$.

We kiezen $N \in \mathbb{N}$ zó, dat

$$N \geq 2, \quad N \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Zij $n \geq N$ een geheel getal.

Omdat $N \geq 2$, hebben we $n^2 \geq 2n$,

daarom $n^2 - n \geq n$

en dus

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^2 - n} - 0\right| &\leq \frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{N} \qquad \text{(omdat } n \geq N\text{)} \\ &\leq \varepsilon \qquad \text{(omdat } N \geq \frac{1}{\varepsilon}\text{)}.\end{aligned}$$

Dus de rij $\left\{a_n = \frac{1}{n^2 - n}\right\}$ convergeert naar 0.

(b). **[7 pt]** Zij $\varepsilon > 0$. We definiëren

$$\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$$

Zij $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ zó, dat $|x - 1| \leq \delta$.

We hebben $\delta \leq 1$, dus $x \in [0, 2]$.

Er geldt

$$\begin{aligned}x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x+2)(x^2 - 1) \\ &= (x+2)(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

en daarom

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2}-0\right| &= |x+1||x-1| \\ &\leq 3\delta \qquad (\text{omdat } x \in [0,2],\ |x-1| \leq \delta) \\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$

Dus

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x+2} \to 0, \quad \text{als } x \to 1$$

Opgave 6 (12 pt, kardinaliteiten van deelverzamelingen van het vlak)

- **[6 pt]** We gaan laten zien dat er een injective functie $g : X \to Y$ is en een injectieve functie $h : Y \to X$.

  Definieer $g : X \to Y$ door $g(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Omdat $(x,y) \in X$, geldt er $x^2 + y^2 < 1$, dus in het bijzonder $x^2 < 1$ en $y^2 < 1$ en dus $|x| < 1$ en $|y| < 1$. Hieruit volgt dat $|\frac{x}{2}| = \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2}$ en evenzo $|\frac{y}{2}| < \frac{1}{2}$ en dus $g(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) \in Y$, dus het bereik van g is inderdaad bevat in Y. Stel $g(x_1,y_1) = g(x_2,y_2)$. Dan geldt $(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}) = (\frac{x_2}{2}, \frac{y_2}{2})$ en dus $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$. Hieruit volgt dat de functie g injectief is.

  Definieer de functie $h : Y \to X$ door $h(x,y) = (x,y)$. We gaan eerst laten zien dat als $(x,y) \in Y$, dan $h(x,y) \in X$. Stel $(x,y) \in Y$, dan geldt $|x| < \frac{1}{2}$ en $|y| < |\frac{1}{2}|$, dus

  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |x|^2 + |y|^2 \\ &< (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 \\ &= \frac{1}{2} \\ &< 1, \end{aligned}$$

  en dus is $h(x,y)$ inderdaad een element van X.

  Voor de injectiviteit van de functie h. Stel $h(x_1,y_1) = h(x_2,y_2)$, dan geldt $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ en dus $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$ en dus is de functie h injectief.

  We hebben dus een injectieve functie g van X naar Y, een injectieve functie h van Y naar X, dus volgens Schröder-Bernstein geldt nu dat $|X| = |Y|$ en dus is er een bijectieve functie f van Y naar X.

- **[6 pt]** Laat $A := \{(0,n) : n \in \mathbb{N}\}$. Het is duidelijk dat de functie $f : \mathbb{N} \to A$ gegeven door $f(n) = (0,n)$ een bijectie is. Het aantal elementen van A is duidelijk oneindig. Laat $B := \mathbb{R}^2$. Het aantal elementen van B is duidelijk oneindig. De functie $g : \mathbb{R} \to B$ gegeven door $g(x) = (x,0)$ een injectie is. Daarom geldt $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^2| = |B|$. We weten dat $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Hieruit volgt dat $|A| = |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \leq |B|$, dus $|A| < |B|$. De bewering is dus niet algemeen waar.