Hertentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Dinsdag 5 januari 2021 13.30-16.30

Docent: *Barbara van den Berg*

- DIT TENTAMEN IS EEN OPEN BOEK TENTAMEN: je mag het dictaat Lineaire algebra van Frits Beukers en je eigen aantekeningen en uitwerkingen tijdens het maken van het tentamen raadplegen.
- HET GEBRUIK VAN ANDERE HULPBRONNEN (TELEFOONS, COMPUTERS, REKENMACHINES OF ANDERE PERSONEN) IS NIET TOEGESTAAN.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel. Nummer alle vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft zes opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 15 punten
  - opgave 3: 15 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten
  - opgave 6: 15 punten

Woord vooraf

De volgende verklaring moet geprint of overgeschreven worden en ***ondertekend*** bij je tentamen gevoegd worden: "Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of andere hulpmiddelen dan het dictaat van lineaire algebra en mijn eigen (werk)collegeaantekeningen". 5 januari 2021, handtekening.

Opgave 1

(*20 punten*)

(a). (*15 punten*) Vind alle oplossingen van de vergelijking $z^3 = -8i$ en schrijf de antwoorden in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

(b). (*5 punten*) Geef je gevonden oplossingen van $z^3 = -8i$ en het complexe getal $-8i$ weer in het complexe vlak.

Opgave 2

(*15 punten*) Laat $a \in \mathbb{R}$. Voor iedere a zijn er drie vlakken gegeven in $\mathbb{R}^3$ met vergelijkingen $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$ en $2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 5$.
Ga na voor welke waarde(n) van a de drie vlakken een snijpunt hebben en voor welke waarde(n) van a de vlakken geen gemeenschappelijk punt hebben. Zijn er ook waarden van a waarvoor de drie vlakken een hele lijn gemeenschappelijk hebben? Licht je antwoord toe.

Opgave 3

(*15 punten*) Gegeven zijn de vier vectoren in de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a). (*10 punten*) Bereken de dimensie van $\text{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$ en geef een basis voor $\text{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4})$.

(b). (*5 punten*) Is $\mathbf{v_3} \in \text{Span}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_4})$? Zo ja, geef $x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ zodat $\mathbf{v_3} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + x_4\mathbf{v_4}$; zo nee, laat zien waarom niet.

Opgave 4

(*15 punten*) Bereken het oppervlak van de driehoek in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Opgave 5

(*20 punten*) Laat A en B twee $n \times n$-matrices zijn. Zijn de volgende beweringen waar of onwaar? Geef een bewijs als de bewering waar is, geef een tegenvoorbeeld als de bewering onwaar is.

(a). (*5 punten*) Als $\det(A) = \det(B) = 0$ dan is $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

(b). (*5 punten*) Als $\det(A) = \det(B) \neq 0$ dan is $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

(c). (*5 punten*) Als $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = n$ dan is $\det(A) = \det(B)$.

(d). (*5 punten*) Als $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) \neq n$ dan is $\det(A) = \det(B)$.

Opgave 6

(*15 punten*) Een $n \times n$-matrix A heet antisymmetrisch als $A^t = -A$.

(a). (*5 punten*) Geef een voorbeeld van een 2×2 antisymmetrische matrix ongelijk aan de nulmatrix.

(b). (*10 punten*) Bewijs dat als A een antisymmetrische $n \times n$ matrix is met n oneven, dan is $\det(A) = 0$. Hint: bedenk dat als voor een getal X geldt $X = -X$ dan volgt $X = 0$.