Hertentamen Lineaire algebra 2 (WISB108)
Donderdag 16 april 2020 9.00-12.00

Docent: *Barbara van den Berg*

- DIT TENTAMEN IS EEN OPEN BOEK TENTAMEN: je mag het dictaat Lineaire algebra van Frits Beukers en je eigen aantekeningen en uitwerkingen tijdens het maken van het tentamen raadplegen.
- HET GEBRUIK VAN ANDERE HULPBRONNEN (TELEFOONS, COMPUTERS, REKENMACHINES OF ANDERE PERSONEN) IS NIET TOEGESTAAN.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel. Nummer alle vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 30 punten
  - opgave 3: 20 punten
  - opgave 4: 20 punten
  - opgave 5: 10 punten

Woord vooraf

De volgende verklaring moet geprint of overgeschreven worden en ***ondertekend*** bij je tentamen gevoegd worden: "Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of andere hulpmiddelen dan het dictaat van lineaire algebra en mijn eigen (werk)collegeaantekeningen".

Opgave 1

Laat a gelijk zijn aan de dag van je geboortedatum, en

$$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

drie vectoren in $\mathbb{R}^3$ zijn. Gegeven is dat voor iedere $a \neq 0$ de verzameling $F = \mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \mathbf{f_3}$ een basis is van $\mathbb{R}^3$. Laat verder E de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ zijn.

(a). (*8 punten*) Geef de overgangsmatrix I_E^F.

(b). (*12 punten*) Bedenk zelf een basis G van $\mathbb{R}^3$ waarvan de vectoren niet een scalair veelvoud zijn van de vectoren uit E en F en bereken I_F^G. Je hoeft niet te bewijzen dat G een basis is.

Opgave 2

(a). (*0 punten*) Schrijf je studentnummer boven aan het eerste blad van je uitwerking.

(b). (*15 punten*) Geef een voorbeeld van een 2×2 matrix A die voldoet aan de volgende eigenschappen:

(i) de matrix A is diagonaliseerbaar;

(ii) de matrix A is zelf niet diagonaal;

(iii) de eigenwaarden van A zijn gelijk aan de laatste twee cijfers van je studentnummer die niet gelijk aan elkaar zijn.

Bewijs dat je voorbeeld voldoet aan (i).

(c). (*15 punten*) Geef een voorbeeld van 2×2 matrix B met de volgende eigenschappen:

(i) de matrix B is niet diagonaliseerbaar;

(ii) twee van de vier coëfficiënten van B zijn gelijk aan het eerste en tweede cijfer uit je studentnummer.

Bewijs dat je voorbeeld voldoet aan (i).

Opgave 3

Laat V en W twee eindig dimensionale vectorruimten zijn, en $L : V \to W$ een lineaire afbeelding. Bewijs de volgende beweringen:

(a). (*10 punten*) Als L injectief is, dan geldt $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(b). (*10 punten*) Als L surjectief is, dan geldt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Opgave 4

We bekijken in deze opgave het bewijs van stelling 9.2.3 (p. 145) uit het dictaat. Hierin wordt met inductie naar $\dim(V)$ bewezen dat iedere vectorruimte V met $V \neq 0$ een orthonormale basis heeft. Het bewijs is duidelijk voor $\dim(V) = 1$. Voor $\dim(V) > 1$ wordt uit de gegeven basis $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ de basis $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2^*}, \ldots, \mathbf{v_n^*}$ gevormd.

(a). (*10 punten*) Laat zien dat voor alle $i \geq 2$ de vectoren $\mathbf{v_i^*}$ inderdaad loodrecht staan op $\mathbf{v_1}$.

(b). (*10 punten*) Veronderstel dat $n = 3$ en $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ een willekeurige basis is van V. Geef een formule voor iedere vector uit de orthonormale basis die je met het procédé uit het bewijs van stelling 9.2.3 verkrijgt.
NB: in de laatste regel van het bewijs staat dat $\mathbf{v_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_n}$ een orthonormale basis vormt van V, maar hierbij is aangenomen dat $\mathbf{v_1}$ lengte één heeft.

Zie volgende pagina voor opgave 5.

Opgave 5

(*10 punten*) Laat A een $n \times n$ matrix zijn met reële eigenwaarden en veronderstel dat er een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$ bestaat van eigenvectoren van A. Bewijs dat A symmetrisch is. Hint: waarom bestaat er een diagonaalmatrix D en een matrix P zodat $A = PDP^{-1}$? Met welke eigenschap kun je P kiezen?