INLEIDING GROEPEN EN RINGEN, 2019–2020

PROEFENTAMEN 1

Vraag 1.

8pt (a) Wat is het teken van de permutatie $\sigma := (1\,2)(3\,4)\cdots(2013\,2014)$ in S_{2014}?

8pt (b) Schrijf de diëdergroep D_{18} als $\{e, r, \ldots, r^8, s, sr, \ldots, sr^8\}$ voor $r, s \in D_{18}$ met $r^9 = s^2 = e$ en $rsr = s$. Welke van deze 18 elementen is $r^2 s^1 r^{2014}$?

8pt (c) Bepaal de orde van volgende matrix in $GL(3, \mathbf{R})$:

$$m := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8pt (d) Geef een maximaal ideaal in $\mathbf{Z}[x, y]$ dat het ideaal $(x + 1) + (2y)(x - 1)$ bevat.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) In de permutatiegroep S_5 is het product van 2020 4-cykels een even permutatie.

8pt (b) De groepen S_3 en D_6 zijn isomorf.

8pt (c) Een direct product van twee niet-triviale groepen heeft altijd minstens drie normale ondergroepen.

8pt (d) Het ideaal $(3, y + 1, z)$ is een priemideaal in de ring $\mathbf{Z}[x, y, z]$.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

8pt (a) Een conjugatieklasse C in een eindige groep G zodat het aantal elementen van C geen deler is van de orde $|G|$ van de groep G.

8pt (b) Een niet-injectief surjectief ringhomomorfisme $\varphi\colon R \to S$ met S een niet-commutatieve ring, waarbij R een ring is zodat voor elk ideaal $I \neq R$, de ring R/I commutatief is.

8pt (c) Een ringhomomorfisme $\varphi\colon \mathbf{Z}/7[x] \to \mathbf{Q}$ met beeld $\neq \{0\}$.

Vraag 4. R is een commutatieve ring. Als I een ideaal is van R, dan is het *radicaal van I* gedefinieerd als de verzameling

$$\mathrm{rad}(I) := \{x \in R \;:\; \exists n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \;:\; x^n \in I\},$$

d.w.z. alle elementen van R waarvan een gehele macht in I ligt. Een ideaal I heet *radicaal* als het gelijk is aan zijn radicaal (dus $I = \mathrm{rad}(I)$). Een element s van een ring S heet *nilpotent* als er een $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ bestaat zodat $s^n = 0$.

3pt (a) Geef een voorbeeld van een ideaal in $\mathbf{Q}[t]$ dat *niet* radicaal is. Bewijs je bewering.

3pt (b) Stel dat $x, y \in R$ en I een ideaal is van R zodat $x^2 \in I$ en $y^3 \in I$. Vindt een gepaste $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ zodat $(x + y)^n \in I$ en bewijs je bewering.

3pt (c) Bewijs dat als I een willekeurig ideaal van R is, dan ook $\mathrm{rad}(I)$ een ideaal is in R.

3pt (d) Druk het feit dat een ideaal I radicaal is uit als eigenschap van de verzameling nilpotente elementen in de quotiëntenring R/I.