INLEIDING GROEPEN EN RINGEN 2019–2020

HERTENTAMEN DINSDAG 14 JULI, 13:30-16:30

Het “Protocol online tentamens Wiskunde” is van toepassing.

Hoe inleveren?

- Lever de uitwerking van het hele hertentamen <u>één keer</u> in via “Opdrachten/Inleveropgaves” in Blackboard. Je kan reeds ingeleverd werk zo vaak opnieuw indienen als je wilt, tot de deadline.
- De *deadline voor online inleveren* is dinsdag 14 juli, 17:30 (dit is inclusief een uur extra tijd voor inscannen en uploaden).

Wat inleveren?

- Je mag een getypte tekst (pdf) of duidelijk leesbare scan inleveren. De naam van het bestand heeft de vorm `<voornaam>_<achternaam>_<studentnummer>.pdf` en de uitwerking bevat je naam en studentnummer. Je mag in het Nederlands of Engels antwoorden. Van de tentamenvragen is hieronder een Nederlandse en Engelse versie beschikbaar.
- Bij je uitwerkingen moet één keer de ondertekende verklaring zitten die op de volgende bladzijde staat (je mag die ook met de hand overschrijven en dan ondertekenen). Voor dit tentamen zijn de toegestane hulpmiddelen: het cursusboek/eigen aantekeningen/streams van hoorcolleges/materiaal op de blackboard-site van het vak. Je mag (voor jezelf) met rekenmachine of computer (online calculator of computeralgebrapaketten) dingen narekenen, maar de output van een dergelijke berekening overnemen zonder uitleg telt niet als correct antwoord. Er mag niet worden overlegd met anderen, ook niet digitaal. In het bijzonder is het verboden tentamenvragen te posten op online fora. Plagiaat, ook uit digitale bronnen, wordt niet getolereerd.
- Schrijf helder maar bondig. Geef niet enkel het antwoord, maar ook de motivatie. Antwoorden zonder uitleg leveren geen punten op.
- Er geldt *geen* “voortschrijdend ongeluk”: als je een onderdeel (x) van die vraag niet kan, maar wel een daaropvolgend onderdeel (y) kan maken door aan te nemen dat (x) klopt, dan mag je dat gebruiken en haal je bij een correcte oplossing de aangegeven punten voor (y).

Communicatie tijdens het tentamen.

- Eventuele mededelingen van de docent zullen direct per email worden verstuurd.
- Heb je een vraag over het tentamen, bijvoorbeeld over een opgave? Werkt je internet niet of ben je in paniek? Je kan tijdens het tentamen een email sturen naar `g.cornelissen@uu.nl`. Je kan ook bellen naar het nummer `+31 20 808 1104` en `meeting ID 477 525 0987` invoeren om in verbinding te komen met een docent. Via het nummer dat je belt kom je telefonisch bij een online vergadering; als meerdere mensen tegelijk inbellen dan moet je misschien even wachten of terugbellen.

Succes!

Verklaring

Dinsdag 14 juli 2020

Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan beschreven op het tentamenblad.

Naam: ____

Studentnummer: ____________________________________

Handtekening: _____________________________________

100pt

Tentamenvragen (English version follows)

$\mathbf{R}$ zijn de reële getallen, $\mathbf{Z}$ de gehele getallen, met $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$.

Vraag 1.

8pt (a) Gebruik het euclidisch algoritme om de inverse van de klasse $\overline{x^2 - x}$ in $(\mathbf{R}[x]/(x^4+1))^*$ te representeren door een polynoom van graad ≤ 3.

8pt (b) Stel $D_{16} = \langle r, s \mid r^8 = s^2 = e, rsr = s\rangle$ is de diëdergroep van orde 16. Schrijf het element

$$r^{14}s^7r^{2020} \in D_{16}$$

met hoogstens 3 symbolen (iedere letter, teken en cijfer telt als één symbool).

8pt (c) Bereken de orde van $\overline{7}$ in $(\mathbf{Z}/15)^*$.

8pt (d) Definieer de hoofdidealen $I := (x^3+1)$, $J := (x+1)$ en $K := (x^{14}+x^7)$ in de polynomenring $\mathbf{R}[x]$. Schrijf het ideaal $I + (I \cap JK)$ als hoofdideaal.

Vraag 2. Zijn onderstaande beweringen waar of onwaar? Bewijs of weerleg.

8pt (a) In de permutatiegroep S_7 is het element $(12)(123)(1234)(12345)(123456)(1234567)$ een even permutatie.

8pt (b) De groep $\mathbf{Z}/14 \times \mathbf{Z}/7$ is cyclisch.

8pt (c) De ring $\mathbf{Q}[x]/(x^2+x+1)$ is een lichaam.

8pt (d) Het ideaal $(x+7, y+14)$ is een hoofdideaal in de ring $\mathbf{R}[x,y]$.

Vraag 3. Geef een voorbeeld van, of laat zien dat zoiets niet kan bestaan:

8pt (a) Een groep van orde 14^{2020} met een ondergroep van orde 7.

8pt (b) Een actie van een groep G op een verzameling X, waarbij er een $x \in X$ bestaat zodat de stabilizator G_x geen normale ondergroep is van G.

8pt (c) Een ringhomomorfisme $\varphi\colon \mathbf{R}[x,y] \to \mathbf{Z}[z]$ met $\varphi(\mathbf{R}[x,y]) \neq \{0\}$ waarvan de kern geen priemideaal is (x, y, z zijn onafhankelijke variabelen).

Vraag 4. Een groep G heet *metacommutatief* als er een exacte rij bestaat

$$1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1$$

met G_1 en G_2 commutatief (zie Inleveropgave 1 voor de notie “exacte rij”).

4pt (a) Bewijs dat een ondergroep van een metacommutatieve groep metacommutatief is.

4pt (b) Laat zien dat er metacommutatieve, niet-commutatieve groepen van orde $2n$ bestaan voor alle n. Bestaan er metacommutatieve, niet-commutatieve groepen van elke eindige orde?

4pt (c) Stel dat H de kleinste ondergroep van G is die alle elementen van de vorm $aba^{-1}b^{-1}$ met $a, b \in G$ bevat. Bewijs dat G metacommutatief is dan en slechts dan als H commutatief is.

Einde van het tentamen

100pt

Exam questions

$\mathbf{R}$ denotes the real numbers, $\mathbf{Z}$ the integers, for $N \in \mathbf{Z}$ is $\mathbf{Z}/N := \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$.

Question 1.

8pt (a) Use the Euclidean algorithm to represent the inverse of the class $\overline{x^2 - x}$ in $(\mathbf{R}[x]/(x^4+1))^*$ by a polynomial of degree ≤ 3.

8pt (b) Let $D_{16} = \langle r, s \mid r^8 = s^2 = e, rsr = s\rangle$ denote the dihedral group of order 16. Write the element
$$r^{14}s^7r^{2020} \in D_{16}$$
using at most 3 symbols (counting every letter, sign, or digit as one symbol).

8pt (c) Compute the order of $\overline{7}$ in $(\mathbf{Z}/15)^*$.

8pt (d) Define the following principal ideals of the polynomial ring $\mathbf{R}[x]$: $I := (x^3+1)$, $J := (x+1)$ and $K := (x^{14}+x^7)\,\mathbf{R}[x]$. Rewrite the ideal $I + (I \cap JK)$ as a principal ideal.

Question 2. Are the following statements true or false? Prove or disprove.

8pt (a) In the permutation group S_7 the element $(12)(123)(1234)(12345)(123456)(1234567)$ is an even permutation.

8pt (b) The group $\mathbf{Z}/14 \times \mathbf{Z}/7$ is cyclic.

8pt (c) The ring $\mathbf{Q}[x]/(x^2+x+1)$ is a field.

8pt (d) The ideal $(x+7, y+14)$ is a principal ideal in the ring $\mathbf{R}[x,y]$.

Question 3. Give an example of, or show that such a thing cannot exist:

8pt (a) A group of order 14^{2020} containing a subgroup of order 7.

8pt (b) A group G acting on a set X, such that there exists $x \in X$ for which the stabilizer G_x is not a normal subgroup of G.

8pt (c) A ring homomorphism $\varphi\colon \mathbf{R}[x,y] \to \mathbf{Z}[z]$ with $\varphi(\mathbf{R}[x,y]) \neq \{0\}$ whose kernel is not a prime ideal (x, y, z are independent variables).

Question 4. A group G is called *metacommutative* if there exists an exact sequence
$$1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1$$
where G_1 and G_2 are commutative (see the first hand in for the notion of an exact sequence).

4pt (a) Prove that a subgroup of a metacommutative group is metacommutative.

4pt (b) Show that there exist metacommutative non-commutative groups of order $2n$ for all n. Do there exist metacommutative, non-commutative groups of any finite order?

4pt (c) Suppose that H is the smallest subgroup of G containing all elements of the form $aba^{-1}b^{-1}$ with $a, b \in G$. Prove that G is metacommutative if and only if H is commutative.

End of the exam