Inl. Analyse in Meer Variabelen — Tentamen 2/11 - 2020, 13:30 -16:30

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer** en het **aantal ingeleverde vellen**.
- **Onderteken** de verklaring op het blad aan het eind van dit tentamen, en voeg dat blad toe aan de scan van je werk.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Het is een open boek tentamen: dictaat en aantekeningen mogen worden gebruikt.
- De normering per onderdeel en voor de opgave als geheel staan vermeld. Het totaal aantal te behalen punten is 40. Het tentamencijfer T wordt berekend uit de totale score S door $T = S/4$, uitgerekend in 1 decimaal nauwkeurig.

Succes !

10 pt totaal **Opgave 1**

4 pt (a) Toon aan dat de afbeelding $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1x_2$ totaal differentieerbaar is, en dat voor alle $x \in \mathbb{R}^2$ geldt dat $D\varphi(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D\varphi(x)(h) = h_1x_2 + h_2x_1, \quad (h \in \mathbb{R}^2).$$

2 pt (b) Gegeven zijn een open deel $U \subset \mathbb{R}^n$ en een tweetal functies $f, g : U \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar zijn in $a \in U$. Je mag gebruiken dat dan $(f, g) : U \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ totaal differentieerbaar is in a. Toon aan dat de totale afgeleide gegeven wordt door:

$$D(f,g)(a) = \begin{pmatrix} Df(a) \\ Dg(a) \end{pmatrix}.$$

4 pt (c) Toon met behulp van (a), (b) en de kettingregel aan dat de functie $fg : U \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x)$ totaal differentieerbaar is in a en dat $D(fg)(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door

$$D(fg)(a)(h) = g(a)Df(a)(h) + f(a)Dg(a)(h), \qquad (h \in \mathbb{R}^n).$$

10 pt totaal **Opgave 2** We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + e^{xy}.$$

6 pt (a) Toon aan dat f een lokaal extreem heeft in $(0, 0)$ en bepaal de aard ervan (lokaal minimum of maximum).

4 pt (b) Toon aan dat f geen andere lokale extremen heeft. Hint: beschouw $xD_1f - yD_2f$.

ZOZ

10 pt totaal **Opgave 3** We beschouwen de ellips

$$E := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + 2x_2^2 = 16\}.$$

Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2.$$

3 pt (a) Bewijs dat f op E een minimale waarde m aanneemt.

7 pt (b) Toon aan dat f de waarde m aanneemt in precies twee punten $a, b \in E$. Bepaal a, b en m.

10 pt totaal **Opgave 4** Gegeven is een C^1 functie $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan

$$x_i D_j \varphi(x) = x_j D_i \varphi(x), \quad (1 \leq i, j, \leq 3,\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Het vectorveld v op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd door:

$$v(x) = \varphi(x)x, \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

3 pt (a) Toon aan dat v op $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een unieke primitieve f heeft met $f(1, 0, 0) = 0$.

3 pt (b) Toon aan dat voor elke $r > 0$ geldt:

$$f(r, 0, 0) = \int_1^r \varphi(s, 0, 0)\, ds.$$

In het vervolg mag je gebruiken dat er voor iedere $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ een C^1-kromme $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ bestaat met $\gamma(0) = (\|a\|, 0, 0)$, $\gamma(1) = a$ en $\langle \gamma(t)\,,\, \gamma(t) \rangle = \|a\|^2$. (Het beeld van γ ligt dus op de sfeer $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = \|a\|\}$.)

3 pt (c) Toon aan dat voor een kromme als boven geldt:

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = 0.$$

1 pt (d) Druk de primitieve f uit in een integraal met φ.

Indienen van het tentamen

- Het tentamen dient na 16:30 binnen 40 minuten gescand te worden en als pdf bestand ingediend in blackboard, onder het assignment ‘tentamen’.
- De naam van het geuploade pdf bestand dient te zijn: ⟨achternaam⟩-tent.pdf/
- Blijf tot 17:00 uur bij de computer om deel te nemen aan een steekproefsgewijze controle van je identiteit per Teams. Log daartoe in bij Teams.
- Meld problemen bij scannen of uploaden direct per email aan e.p.vandenban@uu.nl of (bij internetproblemen) per telefoon: 06-29371864.
- Onderteken de volgende verklaring, en voeg dit blad met handtekening bij de scan:

  Hierbij verklaar ik dat ik de uitwerkingen van dit tentamen zelf heb gemaakt, zonder hulp van andere personen of van andere hulpmiddelen dan het dictaat, de opgavenbundel, het bij de cursus behorende materiaal, de eigen aantekeningen en het dictaat Inleiding Analyse.

  Handtekening: