Tentamen Algoritmiek

30 september 2008, 15.15 – 17.00, Educ. Beta.

1. **Selectie met Tertiaan-Methode.** De *tertiaan* van een verzameling met n verschillende elementen is het element met rang $\lceil n/3 \rceil$. Gegeven is een vergelijkingsgebaseerde methode `Tertiaan(A,p,q)` die uit een array-segment $A[p..q]$ de tertiaan van de elementen in dat segment oplevert. De complexiteit is lineair, dwz., er is een constante β zdd. `Tertiaan(A,p,q)` in het slechtste geval ten hoogste $\beta.(q-p+1)$ vergelijkingen doet.

   (a) Hoe kun je de methode `Tertiaan` wijzigen om het element van rang $\lfloor \frac{2}{3}(n+1) \rfloor$ met $\beta.(q-p+1)$ vergelijkingen (worst case) te vinden?
   (b) Laat zien hoe je `Tertiaan` kunt gebruiken om k-Selectie voor willekeurige k te doen met hoogstens $\frac{3}{2}\beta n$ vergelijkingen.

2. **De zwaarste stijgende deelrij.** Gegeven is een array $A[1..n]$ van integers; deze is niet gesorteerd. Een *deelrij* van A is een rij $b_1, \ldots, b_{n'}$, waar $n' \leq n$, waarvan de getallen in deze volgorde voorkomen in de array A. (Formeel uitgedrukt betekent dit, dat er een stijgende rij indices $i_1, \ldots, i_{n'}$ is, zodanig dat b_j gelijk is aan $A[i_j]$.) De deelrij noemen we *stijgend* als voor $i < j$ geldt $b_i < b_j$. Het *gewicht* van de deelrij is de som van de getallen in de deelrij. Gevraagd wordt te bepalen een *zwaarste stijgende deelrij* (ZSD).

   (a) Uitspraak: "Je kunt een ZSD met een Greedy Algoritme bepalen, want het *grootste getal* uit A zit er altijd in." Is deze bewering juist? (Geef bewijs of tegenvoorbeeld.)
   (b) Definieer $K(i)$ als het maximale gewicht van een stijgende deelrij van $A[1..i]$. Kun je op basis van deze definitie een Optimal Substructure Property bewijzen?
   (c) Definieer $L(i)$ als het maximale gewicht van een stijgende deelrij die eindigt met $A[i]$. Kun je op basis van deze definitie een Optimal Substructure Property bewijzen?
   (d) Geef op basis van de definitie uit onderdeel (b) of (c) een Dynamisch Programmeer algoritme voor ZSD. Wat is de complexiteit?

3. **Breadth-first Search.** Zij $G = (V, E)$ een ongerichte graaf en $s \in V$. Volgens het boek berekent de Breadth-First Search met startpunt s, voor elke $v \in V$ een getal $d[v]$ gelijk aan de afstand $\delta(s, v)$.

   (a) Zij x en y knopen uit V, en δ is de afstand tussen x en y; bewijs dat $|d[x] - d[y]| \leq \delta \leq d[x] + d[y]$.
   (b) Iemand beweert: als G een boom is, geldt altijd $\delta = d[x] + d[y]$. Is dit juist?
   (c) Laat zien, hoe je de BFS procedure kunt aanpassen om te bepalen of de graaf G een boom is.
   (d) Het algoritme uit onderdeel (c) moet in $O(n)$ tijd lopen (n is het aantal knopen). Laat zien dat je algoritme deze grens haalt, of verbeter het en laat zien dat het verbeterde algoritme in $O(n)$ tijd loopt.

1