**Logica voor Informatica** **VOORBLAD**
**1 Februari 2011** **Toets 2**

**Tijd 13.30-16.30**

## Aanwijzingen

- De toets is *gesloten boek*: je mag geen boek, lesmateriaal, of college aantekeningen gebruiken en ook geen uitwerkingen of bladen met hints van werkcollegeopgaven.
- Je mag wel één A4-tje met eigen aantekeningen gebruiken. Dit A4-tje mag aan beide zijden beschreven zijn.
- Er zijn 5 opgaven, elk met een a- en een b-onderdeel. Elk onderdeel telt voor 1 punt. De moeilijkheidsgraad van de onderdelen is niet altijd gelijk en kan dus variëren.
- Laptops, iPads, (grafische) rekenmachines, mobiele telefoons, en alle andere soortgelijke apparaten en gadgets dienen *niet* gebruikt en in de tas te blijven.
- Beantwoord opgaven in de volgorde die jij wilt.
- Beantwoord elke opgave op een APART vel i.v.m. het nakijken, zie hieronder.

## Aanwijzingen bij opschrijven van antwoorden

- Maak van het tentamenpapier een aantal APARTE VELLEN:
  - scheur elk dubbelvel tentamenpapier door op de vouw in het midden
  - elke dubbelvel tentamenpapier geeft dus 2 aparte vellen
  - zorg dat je zo ten minste 5 aparte vellen krijgt, gebruik de rest als kladpapier.
- Beantwoord elke opgave op een APART vel.
- Schrijf leesbaar en niet met potlood.
- Schrijf op ieder vel dat je inlevert je **naam**.

---

**VUL HET ONDERSTAANDE IN EN LEVER MET DE OPGAVEN IN:**

**Naam:**

**Studentnummer:**

**Nummer werkcollegegroep:**

**Omcirkel welke opgaven je inlevert:** 1 2 3 4 5

**Wat lever je in: dit voorblad en ... aparte vellen.**

**Lever dit voorblad ingevuld in, samen met de opgaven die je inlevert.**

Lees eerst het voorblad **13.30 -16.30**

**Opgave 1** (Formules en modellen)

**1.a** Wat wordt verstaan onder een atomaire formule.

**1.b** Is de volgende bewering juist: als $(\exists_x P(x) \to \exists_x Q(x))$ waar is in een zeker model $M$, dan is $\exists_x(P(x) \to Q(x))$ ook waar in dat model. Verklaar uw antwoord.

**Opgave 2** (Logische equivalentie)

**2.a** Stel $x$ komt niet vrij voor in $\psi$. Toon aan dat $(\forall_x \varphi(x) \to \psi) \to \exists_x(\varphi(x) \to \psi)$ logisch equivalent is aan TRUE. Laat dit zien door gebruik van standaardequivalenties. (NB TRUE, of T, is het equivalent van enige standaardtautologie zoals $\neg\chi \vee \chi$.)

**2.b** Bepaal een prenexe normaalvorm voor de volgende formule. Beschrijf de stappen waarmee u deze verkrijgt en waarom elke stap is toegestaan.

- $\exists_x \forall_y P(x, y) \to \forall_x \exists_y Q(x, y)$.

**Opgave 3** (Logisch gevolg)

**3.a** Stel $\varphi$ en $\psi$ zijn willekeurige predikaatlogische formules. Stel dat $\{\varphi\} \models \psi$. Geldt dan ook altijd $\{\neg\varphi\} \models \neg\psi$? Verklaar of geef een tegenvoorbeeld.

**3.b** Welke van de volgende logische beweringen zijn juist, welke onjuist. Bewijs steeds uw antwoord.

- $\{\forall_x \forall_y (P(x, y) \to \neg P(y, x))\} \models \forall_z \neg P(z, z)$
- $\{\forall_x P(x) \to \exists_y Q(y)\} \models \exists_x \exists_y (P(x) \to Q(y))$
- $\models \forall_x(\neg P(x) \to P(f(x))) \to \exists_x P(x)$
- $\{\forall_x(P(x) \to Q(x)), \exists_x(P(x) \wedge \neg R(x))\} \models \exists_x(\neg Q(x) \wedge R(x))$

**Opgave 4** (Afleidingen en afleidbaarheid)

**4.a** Stel $x$ komt niet vrij voor in $\psi$. Toon binnen het axiomastelsel van de predikaatlogica (zoals op college ingevoerd, *zie ommezijde*) aan dat

$$\{\varphi\} \vdash (\forall_x \varphi \to \psi) \to \forall_x \psi$$

Laat dit dus zien zonder gebruik van modellen.

**4.b** Toon aan: $\{\forall_x \forall_y (P(x) \to \neg Q(x))\} \nvdash \exists_x(P(x) \wedge Q(x))$.

**Opgave 5** (Floyd-Hoare logica)

**5.a** Wanneer is de correctheidsbewering $\{\varphi\}\ x := t\ \{\psi\}$ waar?

**5.b** Geef een afleiding in Hoare logica voor:

$$\vdash \{x > 1\} \text{ IF } 2x > y \text{ THEN } y := y - x \text{ ELSE } x := x + y\ \{x > y\}.$$

Elke opgave op een APART vel. Je naam op elk ingeleverd vel. Lever ook het voorblad in.

Waar van toepassing is de volgende axiomatisering voor de predikaatlogica te gebruiken:

Axiomas

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$
4. $\forall_x \varphi(x) \to \varphi(t)$, als term $t$ vrij ('substitueerbaar') voor $x$ in $\varphi$ is
5. $\forall_x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall_x \psi)$, als $x$ niet vrij in $\varphi$ is

Afleidingsregels

MP Modus Ponens: $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$

Gen Generalization: $\varphi \vdash \forall_x \varphi$