Ringen en Galoistheorie, 1e deel, 19 april 2012

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

OPGAVEN

1. Stel $P(X) = X^3 + X - 3$.

   (a) (1/2 pt) Ontbindt $P(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X]$.

   (b) (1/2 pt) Ontbindt $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

   ! (c) (1/2 pt) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dat het polynoom $X^n + Y^4 - 1$ irreducibel is in $\mathbb{C}[X, Y]$.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 5)$ een lichaam is.

2. Zij R_1, R_2 een tweetal ringen enbeschouw de productring $R_1 \times R_2$. Met R_1^*, R_2^* geven we de éénhedengroepen van R_1 respectievelijk R_2 aan.

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat de éénhedengroep in $R_1 \times R_2$ gegeven wordt door $R_1^* \times R_2^*$.

   (b) (1/2 pt) Stel in dit onderdeel dat R_1, R_2 domeinen zijn. Bepaal de nuldelers van $R_1 \times R_2$.

   (c) (1/2 pt) Stel dat I_1 een ideaal is in R_1 en I_2 een ideaal in R_2. Bewijs dat $I_1 \times I_2$ een ideaal in $R_1 \times R_2$ is.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat elk ideaal in $R_1 \times R_2$ van de vorm $I_1 \times I_2$ is, met I_1, I_2 idealen in R_1 resp. R_2.

   (e) (1 pt) Bewijs dat $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 4) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Beschouw de afbeelding $\phi : \mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T]$ gegeven door $\phi : F(X, Y) \mapsto (F(T, 0), F(0, T))$.

   (a) (1/2 pt) Bewijs dat ϕ een ringhomomorfisme is.

   (b) (1/2 pt) Geef een voortbrenger van de kern van ϕ.

   Zij R' de deelring van $\mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T]$ bestaande uit alle paren $(P(T), Q(T))$ met $P(0) = Q(0)$.

   (c) (1/2 pt) Bewijs dat R' het beeld van ϕ is.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $R' \cong \mathbb{R}[X, Y]/(XY)$.

   ? (e) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{R}[X, Y]/(XY)$ niet isomorf is met $\mathbb{R}[T] \times \mathbb{R}[T]$ door de vergelijking $a^2 = 1$ in a op te lossen in elk van de twee ringen.

Z.O.Z.

4. Gegeven is een ring R, een ideaal I in R en een deelring R' van R.

   (a) (1/2 pt) Laat zien dat $I \cap R'$ een ideaal in R' is.

   Beschouw nu de ring

$$\mathbb{Z}[1/3] := \{a/3^k \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$

   dat wil zeggen de ring $\mathbb{Z}$ samen met de rationale getallen waarvan de noemer een macht van 3 is.

   (b) (1 pt) Bepaal de éénheden in $\mathbb{Z}[1/3]$.

   (c) (1 pt) Bewijs dat $\mathbb{Z}[1/3]$ een hoofdideaalring is. (je mag gebruiken dat $\mathbb{Z}$ een hoofdideaalring is).