Ringen en Galoistheorie, 1e deel, 18 april 2013

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

NB: Al onze ringen zijn commutatief met een 1-element.

1. Zij $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 - 2$.
   (a) (1/2 pt) Ontbindt $P(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) (1 pt) Ontbindt $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dat het polynoom $X^n + Y^n - 1$ irreducibel is in $\mathbb{C}[X, Y]$ (hint: gebruik Eisenstein).
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{Q}[X]/(X^4 + 5)$ een lichaam is.

2. Zij R een ring en I een ideaal ongelijk aan R. Geef het natuurlijke homomorfisme $R \to R/I$ aan met ϕ.
   (a) (1/2 pt) Zij J een ideaal in R/I. Bewijs dat $\phi^{-1}(J)$ een ideaal in R is.
   (b) (1/2 pt) Stel dat R een hoofdideaalring is. Bewijs dat R/I een hoofdideaalring is.
   (c) (1/2 pt) Geef een voorbeeld van R, I waarin R/I een hoofdideaalring is en R niet.
   (d) (1 pt) Bewijs dat J een priemideaal in R/I is precies dan als $\phi^{-1}(J)$ een priemideaal in R is.

3. Beschouw de afbeelding $\phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ gegeven door $\phi : F(X) \mapsto (F(1), F(-1))$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat ϕ een ringhomomorfisme is.
   (b) (1/2 pt) Geef een voortbrenger van de kern van ϕ.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
   (d) (1/2 pt) Bepaal de oplossingen van de vergelijking $y^2 = 1$ in $y \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
   (e) (1/2 pt) Los $y^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ X^2 - 1)$ in $y \in \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1)$.

4. Beschouw de ring
$$\mathbb{Z}[1/5] := \{a/5^k |\ a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$
   dat wil zeggen de ring $\mathbb{Z}$ samen met de rationale getallen waarvan de noemer een macht van 5 is.
   (a) (1 pt) Bepaal de éénheden in $\mathbb{Z}[1/5]$.
   (b) (1 pt) Bepaal de irreducibele elementen in $\mathbb{Z}[1/5]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{Z}[1/5]$ een unieke ontbindingsring is. (Je mag gebruiken dat $\mathbb{Z}$ een unieke ontbindingsring is).