Ringen en Galoistheorie, deel 2

27 juni 2013, 9-12 uur

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider.
- Belangrijk: laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. Beantwoord de volgende korte vragen en geef een motivatie:

   (a) (5 pt) Waar of niet waar: Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dat wil zeggen $K \subset M \subset L$. Dan is L/M een Galoisuitbreiding.

   (b) (5 pt) Waar of niet waar: Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dus $K \subset M \subset L$. Dan is M/K een Galoisuitbreiding.

   (c) (4+4 pt) Welk van de volgende groepen kunnen voorkomen als Galoisgroep van het splijtlichaam van een vierde graads polynoom:

      i. $C(2) \times C(2) \times C(2)$ ($C(2)$ is de cyclische groep van 2 elementen).

      ii. De diedergroep van orde 8.

   (d) (5 pt) Bewijs dat $x^3 - x - 1$ irreducibel in $\mathbb{Q}[x]$ is.

   (e) (11 pt) Zij α een nulpunt van $x^3 - x - 1$. Bepaal het inverse element van $\alpha + 2$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   (f) (8 pt) Bepaal het aantal tussenlichamen van de uitbreiding $\mathbb{F}_{3^{10}}/\mathbb{F}_3$ (inclusief $\mathbb{F}_{3^{10}}$ en $\mathbb{F}_3$ zelf)

   (g) (8 pt) Zij $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ een irreducibel polynoom van graad r. Zij α een nulpunt van f en $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$. Zij $\phi : K \to K$ het automorfisme gegeven door $\phi : \beta \mapsto \beta^p$ voor alle $\beta \in \mathbb{F}_p(\alpha)$. Bewijs dat de verzameling nulpunten van f gegeven wordt door $\alpha, \phi(\alpha), \ldots, \phi^{r-1}(\alpha)$.

2. NB: Als je in de volgende vragen een onderdeel gemist heb dan kun je het resultaat ervan toch gebruiken in de daaropvolgende onderdelen.

   We bekijken de uitbreiding $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ van $\mathbb{Q}$.

   (a) (5 pt) Bewijs dat $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$.

   (b) (5 pt) Bewijs dat $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ een Galois uitbreiding is en laat zien dat er elementen $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ zijn met de eigenschap

   $$\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3},\ \sigma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}, \quad \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3},\ \tau(\sqrt{5}) = \sqrt{5}.$$

   (c) (5 pt) Met welke groep van vier elementen is $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ isomorf?

Z.O.Z.

Stel $\alpha = \sqrt{(2-\sqrt{3})(5-2\sqrt{5})}$. We gaan allereerst laten zien dat α graad 8 over $\mathbb{Q}$ heeft.

(d) (5+5 pt) Zij $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ als boven en stel dat $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$. We gaan een tegenspraak afleiden.

   i. Laat zien dat $\sigma(\alpha) = \epsilon\sqrt{5}(2-\sqrt{3})/\alpha$ met $\epsilon \in \{-1, 1\}$ (Hint: bepaal $\sigma(\alpha^2)$).

   ii. Laat vervolgens zien dat $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$.

(e) (5 pt) Laat zien dat uit voorgaand onderdeel volgt dat $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ en concludeer dat α graad 8 over $\mathbb{Q}$ heeft.

(f) (5 pt) Laat zien dat de nulpunten van het minimaalpolynoom van α geschreven kunnen worden als

$$\pm\alpha,\ \pm\sqrt{5}/\alpha,\ \pm\sqrt{5}(2-\sqrt{3})/\alpha,\ \pm(5-2\sqrt{5})/\alpha.$$

(Hint: ze komen van $\pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})(5 \pm 2\sqrt{5})}$).

(g) (5+10 pt) Laat zien dat $\mathbb{Q}(\alpha)$ een Galois uitbreiding van $\mathbb{Q}$ is en bepaal de Galoisgroep.