Toets 3, Ringen en Galois, 17 juni 2014, 15u15-16u15

1. (a) (1 pt) Bepaal de graad van de uitbreiding $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4})$ over $\mathbb{Q}$.
   (b) (1 pt) Toon aan dat $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4})$.
   (c) (1 pt) Bepaal het minimaalpolynoom van $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{4}$.

2. Geef van de volgende uitspraken aan of ze goed of fout zijn. Motiveer je antwoord door middel van een kort bewijs of tegenvoorbeeld.
   (a) (1 pt) De graad $[L : K]$ van het splijtlichaam over K van een veelterm $f \in K[X]$ is altijd de graad van f.
   (b) (1 pt) In karakteristiek nul is elke lichaamsuitbreiding separabel.
   (c) (1 pt) In karakteristiek drie is elke lichaamsuitbreiding separabel.
   (d) (1 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is separabel, dan is L/K separabel.
   (e) (1 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is Galois, dan is L/K Galois.
   (f) (1 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is Galois, dan is M/L Galois.
   (g) (1 pt) Er bestaat een lichaamsautomorfisme σ van $\mathbb{C}$ zó dat $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt[3]{2}$.