Ringen en Galoistheorie, 21 april 2016

Bij dit tentamen mogen geen boek of aantekeningen gebruikt worden.
Schrijf op elk vel je naam, studnr.

Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

1. Stel $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.
   (a) (1 pt) Bewijs dat $P(x)$ irreducibel is in $\mathbb{Q}[x]$ (hint: vervang x door $x+1$).
   (b) (1 pt) Ontbind $P(x)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat voor elke $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ het polynoom $x^n + y^m - 1$ irreducibel is in $\mathbb{C}[x, y]$.

2. Zij R de deelring van $\mathbb{Q}(x)$ die bestaat uit de rationale functies $P(x)/Q(x)$ met de eigenschap dat $Q(0) \neq 0$ en $Q(1) \neq 0$.
   (a) (1/2 pt) Bepaal de eenheden in R.
   (b) (1/2 pt) Bepaal de irreducibele elementen in R.
   (c) (1 pt) Bepaal de maximale idealen in R.

3. Zij R_1, R_2 een tweetal ringen. Onder de productring $R_1 \times R_2$ verstaan we de ring bestaande uit geordende paren (r_1, r_2) met $r_1 \in R_1, r_2 \in R_2$ en de componentsgewijze optelling en vermenigvuldiging. Dus $(r_1, r_2) + (s_1, s_2) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2)$ en $(r_1, r_2)(s_1, s_2) = (r_1 s_1, r_2 s_2)$.

   Beschouw nu de polynoomring $\mathbb{R}[x, y]$ in twee variabelen x, y en het ringhomomorfisme $\phi : \mathbb{R}[x, y] \to \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y]$ gegeven door $\phi : p(x, y) \mapsto (p(x, 0), p(0, y))$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat de kern van ϕ gegeven wordt door (xy).
   (b) (1 pt) Bewijs dat er geen isomorfisme bestaat tussen $\mathbb{R}[x, y]/(xy)$ en $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y]$. (hint: bepaal de oplossingen voor $a^2 = 1$ in elk van de ringen).
   (c) (1/2 pt) Geef een element van $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[y]$ dat niet in het beeld van ϕ zit.

4. Zij $L \subset \mathbb{C}$ het splijtlichaam van $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ en zij $\alpha \in L$ een reëel nulpunt van $f(x)$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat de volledige nulpuntenverzameling van f gegeven wordt door $\pm\alpha, \pm\sqrt{-2}/\alpha$.
   (b) (1/2 pt) Bewijs dat $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$.
   (c) (1/2 pt) Merk op dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-2})$ en bewijs dat $[L : \mathbb{Q}] = 8$.
   (d) (1 pt) Geef expliciete voortbrengers van $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ en hun relaties.
   (e) (1 pt) Bepaal alle ondergroepen van orde 4 van $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ en de bijbehorende invariante lichamen van graad 2 over $\mathbb{Q}$.