Ringen en Galoistheorie, Herkansing 22 aug 2013

Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

1. Stel $P(X) = X^4 - 2X + 1$.
   (a) (1/2 pt) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) (1/2 pt) Ontbind $P(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ dat het polynoom $X^n + Y^n - 1$ irreducibel is in $\mathbb{C}[X, Y]$.
   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]/(X^3 - 2)$ isomorf is met $\mathbb{F}_{343}$, het lichaam met 343 elementen.

2. Zij R een domein.
   (a) (1 pt) Stel dat 2 een éénheid is in R. Bewijs dat $R[X]/(X^2 - 1)$ isomorf is met $R \times R$.

   In de volgende onderdelen hoeft 2 geen éénheid in R te zijn.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de kern van het ringhomomorfisme $\phi : R[X] \to R \times R$ gegeven door $\phi(F(X)) = (F(1), F(-1))$.
   (c) (1/2 pt) Laat vervolgens zien dat $R[X]/(X^2 - 1)$ isomorf is met een deelring van $R \times R$.
   (d) (1/2 pt) Stel dat $R[X]/(X^2 - 1)$ isomorf is met $R \times R$. Bewijs dat 2 een éénheid is in R. (Hint: los $a^2 = a$ op in beide ringen).

3. Beschouw de deelring R van de rationale functies $\mathbb{Q}(X)$ van de vorm $P(X)/Q(X)$ met $P(X), Q(X)$ polynomen in $\mathbb{Q}[X]$ en $Q(1) \neq 0$.
   (b) (1/2 pt) Bepaal de éénheden in R.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat, op vermenigvuldiging met éénheden na, $X - 1$ het enige irreducibele element in R is.
   (d) (1/2 pt) Bepaal de idealen in R.

4. Beschouw het irreducibele polynoom $f = X^8 - 16X^4 + 16 \in \mathbb{Q}[X]$ en zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}$.
   (a) (1/2 pt) Bewijs dat f minstens één reëel nulpunt heeft.
   (b) (1/2 pt) Stel dat $\alpha \in L$ een nulpunt is van f, dat wil zeggen: $\alpha^8 - 16\alpha^4 + 16 = 0$. Laat zien dat $i\alpha$ en $2/\alpha$ ook nulpunten van f zijn (met $i = \sqrt{-1}$).

Z.O.Z.

Van nu af aan laten we α een reëel nulpunt van f zijn.

(c) (1/2 pt) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$.

(d) (1/2 pt) Bewijs dat $i \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ en concludeer hieruit dat $[L : \mathbb{Q}] = 16$.

(e) (1/2 pt) Noem $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Laat zien dat er elementen $\sigma, \tau, \rho \in G$ zijn die als volgt werken:

$$\sigma : \alpha \mapsto i\alpha, i \mapsto i, \quad \tau : \alpha \mapsto 2/\alpha, i \mapsto i, \quad \rho : \alpha \mapsto \alpha, i \mapsto -i.$$

Laat ook zien dat ze G voortbrengen.

(f) (1/2 pt) Bepaal de orde van deze elementen en hun relaties.

(g) (1 pt) Zij H de ondergroep van G, voortgebracht door σ. Bepaal het fixlichaam van H.