Herkansing Ringen en Galoistheorie, WISB222

20 augustus 2014, 13:30 - 16:30

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Al onze ringen zijn commutatief.
- Belangrijk: laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

1. Zijn de volgende uitspraken goed of fout? Verklaar je antwoord.
   (a) (1/2 pt) Het product van twee hoofdidealen in $\mathbb{Z}[X]$ is weer een hoofdideaal.
   (b) (1/2 pt) De éénhedengroep in de productring $R_1 \times R_2$ wordt gegeven door $R_1^* \times R_2^*$.
   (c) (1/2 pt) Het polynoom $14X^6 - 42X^2 + 5$ is irreducibel in $\mathbb{Q}[X]$.
   (d) (1/2 pt) In $\mathbb{Z}[X, Y]$ is $(X - Y^2, Y - 3)$ maximaal ideaal.
   (e) (1/2 pt) De graad $[L : K]$ van het splijtlichaam over K van een veelterm f is altijd de graad van f.
   (f) (1/2 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is Galois, dan is L/K Galois.
   (g) (1/2 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is Galois, dan is M/L Galois.
   (h) (1/2 pt) Het eindige lichaam $\mathbb{F}_{81}$ is bevat in $\mathbb{F}_{729}$.

2. Beschouw de polynoomring $\mathbb{R}[X, Y]$ in X, Y en het ringhomomorfisme $\phi : \mathbb{R}[X, Y] \to \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[x]$ gegeven door

$$\phi : f(X, Y) \mapsto (f(X, X), f(X, -X)).$$

   (a) (1/2 pt) Bewijs: als $(p(X), q(X))$ in het beeld van ϕ zit, dan $p(0) = q(0)$.
   (b) (1/2 pt) Bewijs: als $p, q \in \mathbb{R}[X]$ en $p(0) = q(0)$, dan zit $(p(X), q(X))$ in het beeld van ϕ.
   (c) (1/2 pt) Bewijs dat $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 - Y^2)$ isomorf is met de ring

$$\{(p(X), q(X)) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] |\, p(0) = q(0)\}.$$

   (d) (1 pt) Bepaal de éénheden in $\mathbb{R}[X, Y]/(X^2 - Y^2)$ (hint: gebruik het isomorfisme uit voorgaand onderdeel).

Z.O.Z.

3. Zij $f = X^4 - 2tX^2 + t$ een polynoom met coefficienten in het lichaam van rationale functies $\mathbb{Q}(t)$ en zij L het splijtlichaam van f over $\mathbb{Q}(t)$.

   (a) (1/2 pt) Zij $\alpha \in L$ een nulpunt van f. Laat zien dat dan ook $-\alpha$ en $\sqrt{t}/\alpha$ nulpunten van f zijn.

   (b) (1/2 pt) Laat zien dat $L = \mathbb{Q}(\sqrt{t}, \alpha)$.

   (c) (1/2 pt) Laat zien dat $\alpha^2 = t \pm \sqrt{t(t-1)}$ door $f = 0$ in X^2 op te lossen en bewijs vervolgens dat $\sqrt{t-1} \in L$.

   Vanaf nu mogen we aannemen dat $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{t}, \sqrt{t-1})$.

   (d) (1/2 pt) Bewijs dat $[L : \mathbb{Q}(t)] = 8$.

   (e) (1/2 pt) Laat zien dat er elementen σ, τ in $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(t))$ bestaan zó dat

$$\sigma(\alpha) = \sqrt{t}/\alpha, \ \sigma(\sqrt{t}) = -\sqrt{t}$$

$$\tau(\alpha) = \alpha, \ \tau(\sqrt{t}) = -\sqrt{t}.$$

   (f) (1 pt) Bepaal ordes van σ, τ en hun relaties en vervolgens $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(t))$ zelf.

   (g) (1/2 pt) Bepaal L^H waarin H de ondergroep van de Galoisgroep is voortgebracht door σ.