Ringen en Galois theorie, 6-4-2017

Gebruik van het dictaat en andere aantekeningen is niet toegestaan.
Beredeneer je antwoorden!!
Als je een onderdeel niet hebt kun je het resultaat ervan wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
Elk onderdeel is 5 punten waard (in totaal 100).
Succes!

1. Welk van de volgende beweringen is waar? Geef een motivatie bij elk van je antwoorden.

   (a) De ring $\mathbb{Q}[X]$ heeft een oneindige eenhedengroep.

   (b) De ring $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ is een lichaam.

   (c) Het hoofdideaal $(X^2+1) \in \mathbb{R}[X,Y]$ is een priemideaal.

   (d) Het hoofdideaal $(X^2+1) \in \mathbb{R}[X,Y]$ is een maximaal ideaal.

   (e) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-1) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

   (f) $\mathbb{Q}[X]/(X^2-2) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

   (g) Zij L/K een eindige Galois uitbreiding en M een tussenlichaam, dat wil zeggen, $K \subset M \subset L$. Dan M/K altijd een Galois uitbreiding.

   (h) Zij L/K een eindige uitbreiding en M_1, M_2 twee tussenlichamen die Galois zijn over K. Zij $M_1 \cdot M_2$ het kleinste deellichaam van L die zowel M_1 als M_2 bevat. Dan is $M_1 \cdot M_2$ altijd Galois over K.

2. Zij $k \in \mathbb{Z}$ en $R_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ kb & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

   (a) Bewijs dat R_k een commutatieve ring is met gebruikelijke optelling en vermenigvulding van matrices.

   (b) Bewijs dat $R_k \cong \mathbb{Z}[X]/(X^2-k)$ (hint: geef een geschikt homomorfisme van $\mathbb{Z}[X]/(X^2-k)$ naar R_k).

   (c) Bewijs: $R_k \cong R_l \iff k = l$.

   (d) Bewijs: R_k heeft nuldelers $\iff$ k is een kwadraat.

Z.O.Z. voor Probleem 3

3. Beschouw het polynoom $f = X^4 + 5X^2 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ en L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}$.

   (a) Bewijs dat f irreducibel is.

   (b) Bewijs dat f minstens één reëel nulpunt heeft.

   (c) Zij α een nulpunt van f. Toon aan dat $\sqrt{-5}/\alpha$ en $-\alpha$ ook nulpunten zijn. Bepaal alle nulpunten van f in termen van α en $\sqrt{-5}$.

   (d) Toon aan dat $\sqrt{-5} \in L$ en dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-5})$.

   (e) Bepaal de graad $[L : \mathbb{Q}]$.

   (f) Toon aan dat er een $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bestaat zó dat

   $$\sigma(\alpha) = \sqrt{-5}/\alpha, \quad \sigma(\sqrt{-5}) = -\sqrt{-5}.$$

   Laat zien dat σ orde 4 heeft.

   (g) Bepaal het deellichaam van L dat via de Galoiscorrespondentie met de ondergroep voortgebracht door σ correspondeert.