Herkansing Ringen en Galoistheorie, WISB222

7 juli 2016, 9:00 - 12:00

Bij dit tentamen mogen geen boek of aantekeningen gebruikt worden.
Schrijf op elk vel je naam, studnr.

Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Veel succes!

1. Zijn de volgende uitspraken goed of fout? Verklaar je antwoord.

   (a) (1/2 pt) Het product van twee hoofdidealen in een ring is weer een hoofdideaal.

   (b) (1/2 pt) De éénheden in $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ worden gegeven door de elementen $1 + ax(\text{mod } x^2)$ met $a \in \mathbb{Z}$.

   (c) (1/2 pt) Het polynoom $7x^6 - 9x^4 + 2$ is irreducibel in $\mathbb{Q}[x]$.

   (d) (1/2 pt) In $\mathbb{Q}[x, y]$ is $(x - y^2, y^2 - 4)$ maximaal ideaal.

   (e) (1/2 pt) De graad $[L : K]$ van het splijtlichaam over K van een veelterm $f \in K[x]$ is altijd een deler van $n!$ waarin $n = \text{graad}(f)$.

   (f) (1/2 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is Galois, dan is L/K Galois.

   (g) (1/2 pt) Als $K \subset L \subset M$ lichamen zijn, en M/K is Galois, dan is M/L Galois.

   (h) (1/2 pt) Het eindige lichaam $\mathbb{F}_{125}$ is bevat in $\mathbb{F}_{625}$.

2. Beschouw de deelring R van $\mathbb{Q}$ gegeven door

$$R = \left\{ \frac{a}{2^k 3^l} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

   (a) (1/2 pt) Bepaal de éénheden in R.

   (b) (1/2 pt) Bepaal de irreducibele elementen in R.

   (c) (1 pt) Bewijs dat R een hoofdideaalring is.

Z.O.Z.

3. Zij $f = x^8 - 2x^4 + t^4$ een polynoom in x met coefficienten in het lichaam van rationale functies $\mathbb{C}(t)$ en zij L het splijtlichaam van f over $\mathbb{C}(t)$.

   (a) (1/2 pt) Zij $\alpha \in L$ een nulpunt van f. Laat zien dat dan ook $i^k\alpha, k = 0, 1, 2, 3$ en t/α nulpunten van f zijn ($i = \sqrt{-1}$).

   (b) (1/2 pt) Laat zien dat $L = \mathbb{C}(t, \alpha)$.

   (c) (1/2 pt) Laat zien dat f irreducibel is in $\mathbb{C}[x, t]$ (hint: beschouw f als polynoom in t en coefficienten in $\mathbb{C}[x]$).

   (d) (1/2 pt) Laat zien dat f irreducibel is in $\mathbb{C}(t)[x]$.

   (e) (1/2 pt) Laat zien dat er elementen σ, τ in $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(t))$ bestaan zó dat

   $$\sigma(\alpha) = i\alpha, \quad \tau(\alpha) = t/\alpha.$$

   (f) (1 pt) Bepaal de ordes van σ, τ en hun relaties en vervolgens $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}(t))$ zelf.

   (g) (1/2 pt) Bepaal L^H waarin H de ondergroep van de Galoisgroep is voortgebracht door σ.