Ringen en Galoistheorie, 3 juli 2019

Gebruik van het dictaat en/of andere aantekeningen is niet toegestaan.
Schrijf op elk vel je naam en studentnummer.
Laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
Ook als je een onderdeel niet kunt maken, kun je het gevraagde resultaat wel gebruiken voor de daaropvolgende onderdelen.
Elk onderdeel is 6 punten waard (in totaal 96; je begint met 4 punten).
Veel succes!

1. Stel $f(X) = X^7 + 5X^6 - 6X^5 + 2X^4 - 2X^3 + 10X - 10$.
   (a) Ontbind $f(X)$ in irreducibele factoren in $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) Ontbind $f(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[X]$.
   (c) Ontbind $f(X)$ in irreducibele factoren in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

2. Zij R een ring met $1 \neq 0$ zodat voor elk element $r \in R \setminus \{1\}$ er een geheel getal $n > 0$ bestaat zodat $r^n = 0$.
   (a) Neem $a \in R \setminus \{0\}$, laat zien dat a inverteerbaar is. *Hint: Gebruik dat* $1 + a \in R \setminus \{1\}$.
   (b) Laat zien dat R isomorf is aan $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Laat R een ring zijn met slechts één ideaal I zodat $(0) \subsetneq I \subsetneq R$.
   (a) Laat zien dat I een priemideaal is.
   (b) Laat zien dat I een hoofdideaal is.
   (c) Bewijs dat I de verzameling is bestaande uit 0 en alle nuldelers van R. *Hint: Gebruik dat $I \cdot I$ gelijk is aan (0) of I.*

4. Bepaal voor elk van de volgende idealen of het een priemideaal is en of het een maximaal ideaal is.
   (a) $(5, X^3 + 6X^2 + 6X + 6)$ in $\mathbb{Z}[X]$.
   (b) $(3X^2 + Y^2)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[X, Y]$.

Z.O.Z. voor opgave 5

5. Zij $f = X^6 + 3$ en laat L een splijtlichaam zijn van f over $\mathbb{Q}$.

(a) Laat zien dat f irreducibel is in $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Zij $\alpha \in L$ een nulpunt van f en ω een derdemachtseenheidswortel, laat zien dat $-\alpha$ en $\omega\alpha$ nulpunten zijn van f.

(c) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(d) Bepaal de groep $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(e) Bepaal een $\beta \in L$ zodat $\mathbb{Q}(\beta)$ een deellichaam is van L van graad 2 over $\mathbb{Q}$. Hoeveel zulke deellichamen zijn er?

(f) Bepaal een $\gamma \in L$ zodat $\mathbb{Q}(\gamma)$ een deellichaam is van L van graad 3 over $\mathbb{Q}$. Hoeveel zulke deellichamen zijn er?