Eerste Toets Datastructuren

24 mei 2017, 13.30–15.30, Olympos Hal 1 en Educ-Theatron.

Motiveer je antwoorden *kort*! Stel geen vragen over deze toets; als je een vraag niet duidelijk vindt, schrijf dan op hoe je de vraag interpreteert en beantwoord de vraag zoals je hem begrijpt.
Cijfer: Vraag 1, 3, 4 en 5 zijn 3pt en vraag 2 en 6 zijn 2pt. Maak vragen 1 en 2 op de voorkant, 3 en 4 op pagina 2 en vragen 5 en 6 op pagina 3. Te halen 16pt, T1 is totaal plus 1 gedeeld door 1,6 (max 10).

1. **Willie's Wortel:** Willie moet een methode `public int fwort(int x)` schrijven die voor positieve `x` de floor (naar beneden afgeronde waarde) van de wortel van `x` oplevert. Willie heeft al bedacht dat de returnwaarde R voldoet aan $R^2 \leq x$ en $(R+1)^2 > x$; voorbeeld `fwort(130)` zou 11 teruggeven. Willie gaat binair zoeken met invariant $i^2 \leq x \wedge j^2 > x$.
   (a) Geef initialisatiecode die x niet gebruikt en de invariant waar maakt.
   (b) Wanneer kan de loop stoppen, en wat moet Willie dan opleveren?
   (c) Hoeveel vergelijkingen met x zijn nodig in het programma?

2. **QuickSort parameters:** Je schrijft een methode `void QS(int[] A, int p, int a)` die Quicksort uitvoert op een segment in `A` dat begint op positie `p` en `a` elementen bevat; de laatste parameter is dus *het aantal te sorteren keys*. De regel `r = Split(A, ...);` verdeelt de keys en levert de positie `r` van de Pivot op.
   (a) Geef een code-regel die de methode afbreekt in de base cases van de recursie.
   (b) Na de regel met `Split` volgen twee recursieve aanroepen. Geef de parameters daarvan.

3. **Stelling 11:** De stelling $\forall n \geq 11 : n^2 - n > 12n - 24$ kan worden bewezen met inductie.
   (a) Bewijs de inductie*basis* (het "startgeval").
   (b) Formuleer *wat* je moet bewijzen in de inductiestap en wat je hierbij als gegeven mag gebruiken.
   (c) Geef het bewijs van de inductiestap.

4. **Ordes en O:** Zijn deze beweringen WAAR of ONWAAR?
   (a) $O(n^2) \cdot O(n) = O(n^3)$.
   (b) $3^n = \Theta(2^n)$.
   (c) $2^n = O(3^n)$.
   (d) $O(n \lg n) + O(n \lg^2 n) = O(n \lg^2 n)$.
   (e) $\Theta(\lg n) = \Theta({}^{10}\log n)$.
   (f) $O(\lg(n^3)) = O(\lg(n^2))$.
   (g) $\lg((n^2)!) = O(n \lg n)$.
   (h) $\lg(n^2) \cdot \lg(n^2) = \Theta(\lg(n^4))$.
   (i) $2n^2 + 4n \lg n + \lg^2 n = O(n \lg n)$.
   (j) $2 \lg^3 n + \sqrt{n} = O(\sqrt{n})$.
   (Geef duidelijk aan over welke bewering je het hebt.)

5. **Sommatieregels:** (a) Hoe luidt de rekenregel voor *Termsplitsing*?
   (b) Is de sommatie $\sum_{i=1}^{n-1} 3^{2i-2}$ een Rekenkundige, Meetkundige of Harmonische sommatie? Zeg waarom.
   (c) Geef de uitkomst van $\sum_{i=1}^{n-1} 3^{2i-2}$.

6. **Bijna gesorteerd:** Je moet een array `A` van n keys sorteren met vergelijkingen. De keys staan allemaal al in de buurt van de goede plek: voor elke i ligt de rang van $A[i]$ tussen $i - 7$ en $i + 7$. Kan dit in lineaire tijd? Bewijs dat het kan door een algoritme met analyse te geven, *OF* dat het niet kan, door een ondergrensbewijs te geven.