Mijn tweede inleveropgave in LaTeX

TeXniCie, studentnr. 1234567

5 oktober 2021

Inhoudsopgave

Opmerking: De TeXniCie is dan wel goed in LaTeX, we zijn wellicht niet zo goed in deze opdrachten. Zorg dat je zelf nadenkt over de opgave en uitwerking, en leer van ons hoe je dat netjes op je computer krijgt!

1 Definities

Raakruimte Een vectorruimte T_pM die hoort bij een punt p op een variëteit M.

Vector Een element v uit de raakruimte, die gezien kan worden als de snelheid van een pad door het punt p.

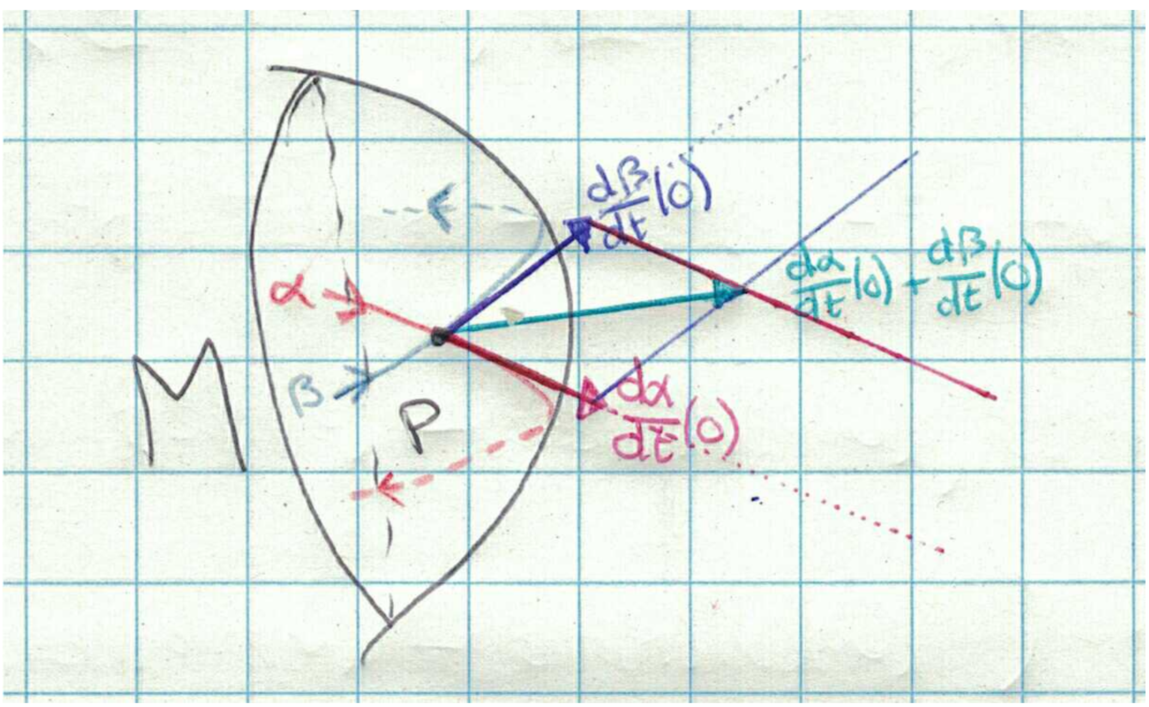
Variëteit Een ruimte zodat

1. De ruimte een topologie heeft;
2. Rondom elk punt een omgeving is te kiezen en een homeomorphisme naar Euclidische ruimte;
3. De ruimte Hausdorff is, d.w.z. de topologie kan elke twee punten onderscheiden.

- Vaak wordt ook gevraagd dat de ruimte paracompact is of dat de topologie een aftelbare basis heeft.

2 Raakruimtes

2.1 Plaatje



Figuur 1: Deze tekening laat zien hoe een raakruimte aan een gladde variëteit is te visualiseren, dit is een vectorruimte dus kunnen we twee vectoren optellen.

2.2 Tabel

raakvector	x-component	y-component
β	12	8
α	12	-7
$\alpha + \beta$	24	1

Tabel 1: De componenten van vectoren in figuur 1.

3 De grote vraag

Een variëteit liggend in $\mathbb{R}^n$ heeft een kanonieke basis voor raakvectoren

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

zodat elke vector in de raakruimte $v \in T_p\mathbb{R}^n$ bepaald is door unieke $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ voor $\lambda_i \in \mathbb{R}$ zodat

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p. \tag{2}$$

We weten ook dat we de raakruimte kunnen zien als de raakvectoren aan paden

$$\gamma\colon\ (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n,\ \text{waar } p = \gamma(0), \tag{3}$$

$$\frac{d\gamma}{dt}(0) \in T_p\mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Voor een ingebedde subvariëteit $M \subset \mathbb{R}^n$ kunnen we zeggen $T_pM \subset T_pR^n$ voor elk punt $p \in M$.

We kunnen ons nu afvragen wanneer een vector van de vorm (2) in de raakruimte ligt, i.e. Wanneer hebben we een pad $\gamma \in \text{curve}_p(M)$ zodat $v = \frac{d\gamma}{dt}(0)$?